

FONCTIONS DERIVABLES

1. La dérivée d'une fonction

Définition. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

tend vers une limite quand x tend vers a . Si elle existe, cette limite, notée $f'(a)$, s'appelle la dérivée de f en a .

Interprétation géométrique. Le rapport $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est la pente de la sécante (droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$). Sa limite est la pente de la tangente au graphe de f en $(a, f(a))$. Donc f est dérivable en a si et seulement si son graphe admet une tangente en $(a, f(a))$.

Proposition. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a . La réciproque est fausse.

Définition. On dit que la fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est dérivable si f est dérivable en tout $a \in I$. On définit alors sa dérivée $f' : I \rightarrow \mathbf{R}$.

2. Règles de calcul

Dérivée d'une somme

Proposition. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R}$. Si f et g sont dérivables en a , alors $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

Plus généralement sous les mêmes hypothèses, pour $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$. On dit que l'opération de dérivation est linéaire.

Dérivée d'un produit

Proposition. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $a \in I$. Si f et g sont dérivables en a , alors fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Dérivée d'un quotient

Proposition. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R}$ avec $g(a) \neq 0$. Si f et g sont dérivables en a , alors f/g est dérivable en a et

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Dérivée d'une fonction composée

Proposition. Soient $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, $g : J \rightarrow \mathbf{R}$, avec $f(I) \subset J$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

3. La condition nécessaire du 1er ordre

Théorème. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$. Si f atteint un maximum en $a \in I$ et si f est dérivable en a , alors $f'(a) = 0$.

4. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème [Rolle]. Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème [Accroissements finis]. Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

5. Dérivées d'ordre supérieur

Définition. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable et $a \in I$. On dit que f est deux fois dérivable en a si f' est dérivable en a . La dérivée de f' en a s'appelle la dérivée seconde de f en a et se note $f''(a)$. On dit que f est deux fois dérivable si f' est dérivable.

On définit par récurrence la k -dérivabilité d'une fonction f . La dérivée k -ième se note $f^{(k)}$ et on a $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$. On dit que f est indéfiniment dérivable si f est k -dérivable pour tout k . On dit que f est de classe C^k si $f^{(k)}$ existe et est continue.