FONCTIONS ELEMENTAIRES

---

1. Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème. *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors*
(i) $J = f(I)$ *est un intervalle ;*
(ii) f *admet une fonction réciproque* $g : J \to I$ *;*
(iii) g *est continue.*

Théorème. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable avec $f' > 0$ sur I (ou $f' < 0$ sur I). Alors*
(i) f *admet une fonction réciproque* $g : J = f(I) \to I$ *;*
(ii) g *est dérivable ;*
(iii) pour tout $y = f(x)$ *dans* J, $g'(y) = 1/f'(x)$.

Notation pratique. On écrit $y = f(x)$, puis $dy = f'(x)dx$. D'où $g'(y) = dx/dy = 1/f'(x)$. Il faut enfin remplacer x par $g(y)$.

2. La fonction exponentielle

Théorème (admis). *Il existe une et une seule fonction dérivable $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui satisfait $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.*

Définition. *Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle et elle est notée* $f(x) = \exp x = e^x$.

Proposition. *La solution de $f'(x) = kf(x)$ et $f(0) = y_0$ est $y = y_0 \exp(kx)$.*

Théorème. *Pour tout $a, b \in \mathbf{R}$, on a $\exp(a + b) = (\exp a)(\exp b)$.*

Corollaire. *Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\exp x > 0$.*

Théorème. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a*
(i) $\frac{\exp x}{x^n} \to +\infty$ *quand* $x \to +\infty$ *;*
(ii) $x^n \exp x \to 0$ *quand* $x \to -\infty$.

Théorème. *La fonction exponentielle est indéfiniment dérivable, strictement croissante et son image est l'intervalle* $]0, +\infty[$.

Définition. *Etant donné $a = \exp b > 0$, on définit la fonction exponentielle de base a par $a^x = \exp(bx)$.*

Théorème. *Etant donnés $a > 0$ et $x, y \in \mathbf{R}$, on a $(a^x)^y = a^{xy}$.*

3. La fonction logarithme

Définition. *La fonction logarithme naturel* $\ln\ :]0,\infty[\to\ \mathbf{R}$ *est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.*

On a donc

$$\begin{cases} x = \ln(y) \\ y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \exp x \\ x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Théorème. *La fonction logarithme naturel est la primitive de* $1/x$ *sur l'intervalle* $]0,\infty[$ *qui est nulle en* 1.

Théorème. *Pour tout* $a, b > 0$, *on a* $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Théorème. *On a :*
(i) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$;
(ii) pour tout $n > 0$, $\frac{\ln x}{x^n} \to 0$ *quand* $x \to +\infty$.

Définition. *Soit* $a > 0$. *La fonction logarithme de base* a $\log_a\ :]0,\infty[\to \mathbf{R}$ *est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base* a.

On a donc

$$\begin{cases} x = \log_a(y) \\ y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = a^x \\ x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Proposition. *Soit* $a > 0$. *On a :*
(i) $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$; $\log_a(a) = 1$;
(ii) $\ln(a^x) = x(\ln a)$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}$.

4. Les fonctions trigonométriques

Soit $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ le cercle unité du plan $\mathbf{R}^2$ avec son orientation trigonométrique. La position d'un point P se déplaçant sur ce cercle peut être définie par son abscisse curviligne, c'est-à-dire la longueur orientée de l'arc AP du cercle, où $A = (1, 0)$. On identifie cette abscisse curviligne à l'angle θ de OA à OP. Par définition, la longueur du cercle est 2π.

Définition. *Soit* $\theta \in \mathbf{R}$. *On définit* $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$ *comme l'abscisse et l'ordonnée du point* P *du cercle* S *défini par l'angle* θ. *Pour* $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, *on pose* $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

Théorème. *Les fonctions* cos *et* sin *ainsi définies vérifient :*
(i) elles sont périodiques de période 2π ;
(ii) cos *est paire et* sin *est impaire ;*
(iii) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Théorème. *Soient* $a, b \in \mathbf{R}$. *On a :*
(i) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$;

(ii) $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

Lemme. *Quand* $\theta \to 0$, $\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$.

Théorème. *Les fonctions* $\cos$ *et* $\sin$ *sont dérivables sur* $\mathbf{R}$ *et on a* $\cos' = -\sin$ *et* $\sin' = cos$*. La fonction* $\tan$ *est dérivable sur les intervalles* $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$ *et* $\tan' = 1 + \tan^2 = 1/\cos^2$.

Proposition. *On a* $a\cos x + b\sin x = A\sin(x+\varphi)$ *où* $A = \sqrt{a^2+b^2}$ *et* φ *est l'angle du point* $(b/A, a/A)$ *de* S.

5. Les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

Définition. *La fonction* $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *est la fonction réciproque de la restriction de la fonction* $\sin$ *à l'intervalle* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

On a donc

$$\begin{cases} x = \arcsin(y) \\ y \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sin x \\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Proposition. *La fonction* $\arcsin$ *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et*

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Définition. *La fonction* $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ *est la fonction réciproque de la restriction de la fonction* $\cos$ *à l'intervalle* $[0,\pi]$.

On a donc

$$\begin{cases} x = \arccos(y) \\ y \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos x \\ x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Proposition. *La fonction* $\arccos$ *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et*

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Définition. *La fonction* $\arctan : \mathbf{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *est la fonction réciproque de la restriction de la fonction* $\tan$ *à l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On a donc

$$\begin{cases} x = \arctan(y) \\ y \in \mathbf{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \tan x \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

Proposition. *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbf{R}$ *et*

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

6. Les fonctions hyperboliques et leurs fonctions réciproques

Définition. *On définit le cosinus, le sinus et la tangente hyperboliques par*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Théorème. *Les fonctions* cosh, sinh *et* tanh *ainsi définies vérifient :*

(i) cosh *est paire,* sinh *et* tanh *sont impaires ;*
(iii) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ *et* $1 - \tanh^2 x = 1/\cosh^2 x$ *;*
(iv) $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$ *et* $\tanh' = 1 - \tanh^2$.

Définition. *La fonction* $argsinh : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *est la fonction réciproque de la fonction* sinh.

On a donc $\quad x = argsinh(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = \sinh x.$

Proposition.

(i) $(argsinh)'(x) = 1/\sqrt{x^2+1}$ *;*
(ii) $argsinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Définition. *La fonction* $argcosh : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ *est la fonction réciproque de la restriction de la fonction* cosh *à l'intervalle* $[0, +\infty[$.

On a donc

$$\begin{cases} x = argcosh(y) \\ y \in [1, +\infty[\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \cosh x \\ x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

Proposition.

(i) $(argcosh)'(x) = 1/\sqrt{x^2-1}$ *;*
(ii) $argcosh x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

Définition. *La fonction* $argtanh : \mathbf{R} \to]-1, 1[$ *est la fonction réciproque de la fonction* tanh.

On a donc

$$\begin{cases} x = argtanh(y) \\ y \in]-1, 1[\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \tanh x \\ x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Proposition.

(i) $(argtanh)'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ *;*
(ii) $argtanh x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.