CALCUL DE PRIMITIVES

1. Primitives et intégrales

Définition. *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbf{R}$. On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbf{R}$ est une primitive de f si*
(i) F est dérivable ;
(ii) pour tout $x \in \mathbf{I}$, $F'(x) = f(x)$.

Théorème (admis). *Toute fonction continue $f : I \to \mathbf{R}$ admet une primitive.*

Théorème. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction admettant une primitive. Alors l'ensemble des primitives de f est $\{F + c, \quad c \in \mathbf{R}\}$ où F est une primitive particulière.*

Notation pratique. On note souvent $\int f(x)dx$ une primitive de f (modulo une constante additive).

Définition. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction admettant une primitive. Etant donnés $a, b \in I$, on définit l'intégrale de f de a à b par*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F|_a^b = F(b) - F(a)}$$

où F est une primitive de f (cela ne dépend pas de la primitive utilisée).

Théorème. *Soient $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction admettant une primitive et $a \in I$. Alors $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui est nulle en a.*

Théorème (propriétés de l'intégrale). *Soient $f, g : I \to \mathbf{R}$ des fonctions admettant une primitive. On a :*

- relation de Chasles *: $\forall a, b, c \in I, \quad \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.*
- linéarité *: Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ admet une primitive sur I et $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$.*
- positivité *: Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur I, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*

2. Utilisation d'un tableau de primitives

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\tanh x$	$\ln\cosh x$
$\dfrac{1}{x^2+a^2} \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a > 0)$	$\arcsin\dfrac{x}{a}$

(à savoir par coeur)

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\lvert\dfrac{x+1}{x-1}\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\,\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\lvert\tan\dfrac{x}{2}\rvert$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\lvert\tan(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4})\rvert$

(à savoir retrouver)

3. Intégration par parties

Théorème. *Soient u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle I. Si $u'v$ admet une primitive, alors uv' admet une primitive et on a*

(i) $\int u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\ dx$;

(ii) $\int_a^b u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\ dx$.

On retient cette règle sous la forme :

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

4. Changements de variables

Théorème. *Soient $\varphi : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable et $f : J \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle J contenu dans $\varphi(I)$.*

(i) Si F est une primitive de f, alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi)\varphi'$.

(ii) Si $\varphi' > 0$ sur I (ou $\varphi' < 0$ sur I) et si G est une primitive de $(f \circ \varphi)\varphi'$, alors $G \circ \varphi^{-1}$ est une primitive de f, où φ^{-1} est la fonction réciproque de φ.

(iii) Pour $a, b \in I$, on a $\int_a^b f \circ \varphi(x)\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$.

Dans tous les cas, il faut retenir la règle suivante

pour le changement de variable $u=\varphi(x)$, $du=\varphi'(x)dx$
et si x varie de a à b, alors u varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$

5. Autres techniques

5.1. Intégration des fractions rationnelles.

Méthode : la décomposition en éléments simples (sur $\mathbf{R}$) de $P(x)/Q(x)$ réduit par linéarité le problème à l'intégration des éléments simples. Pas de problème pour

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}dx$$

ou pour

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx.$$

Pour calculer

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

on complète le carré dans ax^2+bx+c pour se ramener par changement de variable à $u^2+\alpha^2$. Enfin, on sait calculer

$$\int \frac{1}{(v^2+1)^n}dv.$$

5.2. Calcul de $\int (\sin x)^p(\cos x)^q dx$, où p et q sont entiers.

C'est facile si p ou q sont impairs. Supposons par exemple $q=2k+1$ impair. Alors on fait le changement de variable $u=\sin x$. Cela donne $du=\cos x dx$ et

$$\begin{aligned}\int (\sin x)^p(\cos x)^q dx &= \int (\sin x)^p(\cos x)^{2k}\cos x dx\\ &= \int u^p(1-u^2)^k du\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer ce polynôme en u.

C'est un peu plus long si p et q sont tous les deux pairs. Il faut utiliser les formules de linéarisation :

$$\begin{aligned}\cos a\cos b =& \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))\\ \sin a\sin b =& -\frac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))\\ \sin a\cos b =& \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))\end{aligned}$$

5.3. Intégration des fractions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

La méthode générale est le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$. On utilise alors les formules suivantes :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

On est alors ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle.

Il existe souvent des changements de variable plus économiques. On regarde diverses symétries de l'élément différentiel $f(x)dx$ sous le signe $\int$:
Si $x \mapsto \pi - x$ laisse invariant $f(x)dx$, on pose $u = \sin x$.
Si $x \mapsto -x$ laisse invariant $f(x)dx$, on pose $u = \cos x$.
Si $x \mapsto \pi + x$ laisse invariant $f(x)dx$, on pose $u = \tan x$.

5.4. Intégration des fractions rationnelles en e^x et e^{-x}.

Le changement de variable $X = e^x$ marche bien. En effet, on a alors $dX = e^x dx$, d'où $dx = dX/X$. On obtient l'intégrale d'une fraction rationnelle en X.

5.5. Elimination des radicaux.

Les changements de variable trigonométriques ou hyperboliques permettent d'écrire certaines quantités comme des carrés :

$\boxed{x^2+1}$

écrivez $x = \tan t$, alors $x^2 + 1 = \tan^2 t + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

ou écrivez $x = \sinh t$, alors $x^2 + 1 = \sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$

$\boxed{x^2-1 \quad \text{avec} \quad |x| > 1}$

écrivez $x = \cosh t$, alors $x^2 - 1 = \cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t$

$\boxed{1-x^2 \quad \text{avec} \quad |x| < 1}$

écrivez $x = \sin t$, alors $1 - x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$

Un autre choix est $x = \cos t$.