

FONCTIONS VECTORIELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

1. L'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^d$

Notation : d est un entier strictement positif ; $\mathbf{R}^d$ est l'espace vectoriel des vecteurs-colonnes $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]$.

Définition. Etant donnés $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^d$, on définit

- (i) le produit scalaire $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$;
- (ii) la norme euclidienne $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$;
- (iii) la distance euclidienne $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{y} - \vec{x}\|$.

Proposition. Le produit scalaire de $\mathbf{R}^d$ vérifie (avec $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^d$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$)

- (i) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$;
- (ii) $\langle \lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{z} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \mu \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$;
- (iii) $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).

Proposition. La norme de $\mathbf{R}^d$ vérifie (avec $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^d$ et $\lambda \in \mathbf{R}$)

- (i) $\|\vec{x}\| \geq 0$ et $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
- (ii) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$;
- (iii) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (inégalité triangulaire).

2. Suites vectorielles

Définition. Une suite vectorielle (à valeurs dans $\mathbf{R}^d$) est une application $n \mapsto \vec{a}_n$ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}^d$. On la note $(\vec{a}_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Définition. On dit qu'une suite $(\vec{a}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $\mathbf{R}^d$ est convergente s'il existe $\vec{l} \in \mathbf{R}^d$ tel que $\|\vec{a}_n - \vec{l}\| \rightarrow 0$. On écrit alors $\vec{a}_n \rightarrow \vec{l}$ et on dit que $\vec{l}$ est la limite de la suite.

Proposition. Notons $a_n^{(i)}$ [resp $l^{(i)}$] la i -ème coordonnée de $\vec{a}_n$ [resp $\vec{l}$]. Alors

$$\vec{a}_n \rightarrow \vec{l} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad a_n^{(i)} \rightarrow l^{(i)}.$$

Etant donnés deux suites vectorielles $(\vec{a}_n)_{n \in \mathbf{N}}, (\vec{b}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et deux scalaires λ, μ , on forme la suite vectorielle $(\lambda \vec{a}_n + \mu \vec{b}_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Cela munit l'ensemble des suites vectorielles d'une structure d'espace vectoriel. On vérifie que les suites vectorielles convergentes forment un sous-espace vectoriel et que la limite est une application linéaire sur ce sous-espace vectoriel. En d'autres termes, la limite d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des limites :

$$\begin{array}{l} \vec{a}_n \rightarrow \vec{a} \\ \vec{b}_n \rightarrow \vec{b} \end{array} \Rightarrow \lambda \vec{a}_n + \mu \vec{b}_n \rightarrow \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

On a aussi sous les mêmes hypothèses $\langle \vec{a}_n, \vec{b}_n \rangle \rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

3. Suites définies par une relation de récurrence linéaire

Etant donnés $A \in M_d(\mathbf{R})$ et $\vec{b} \in \mathbf{R}^d$, on étudie l'équation de récurrence linéaire (du 1er ordre à coefficients constants)

$$\vec{u}_{n+1} = A\vec{u}_n + \vec{b} \quad (*)$$

Théorème A. Les solutions de l'équation homogène

$$\vec{u}_{n+1} = A\vec{u}_n \quad (**)$$

forment un espace vectoriel de dimension d .

Théorème B. La solution générale de (*) est la somme de la solution générale de l'équation homogène (**) et d'une solution particulière de (*).

Remarque. La solution générale de (**) est $\vec{u}_n = A^n \vec{u}_0$ où $\vec{u}_0$ est un vecteur quelconque dans $\mathbf{R}^d$. En général, il n'est pas facile de calculer A^n . Cependant, si il existe $P \in M_d(\mathbf{R})$ inversible et $D \in M_d(\mathbf{R})$ diagonale (c'est-à-dire $d_{ij} = 0$ pour $i \neq j$) telles que $A = PDP^{-1}$ (on dit alors que A est *diagonalisable*), alors $A^n = PD^nP^{-1}$.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_d \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_d^n \end{pmatrix}$$

Une remarque voisine est que si $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, alors $A^n\vec{x} = \lambda^n\vec{x}$ (s'il est non nul, un tel $\vec{x}$ est appelé *vecteur propre* de A).

L'équation de récurrence linéaire scalaire d'ordre d :

$$u_{n+d} = a_1 u_{n+d-1} + \cdots + a_d u_n + b$$

peut être mise sous la forme (*) en posant

$$\vec{u}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+d-1} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_d & a_{d-1} & a_{d-2} & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}$$

mais il est préférable de chercher les solutions de l'équation homogène sous la forme $u_n = r^n$. On voit alors que r doit être racine de l'équation caractéristique

$$r^d = a_1 r^{d-1} + a_2 r^{d-2} + \cdots + a_d$$

En particulier, si l'équation caractéristique a d racines distinctes, $r_1, \dots, r_d$, la solution générale de l'équation homogène est

$$u_n = c_1 r_1^n + \dots + c_d r_d^n.$$

4. Fonctions vectorielles

Soit $\vec{f}: I \rightarrow \mathbf{R}^d$ où I est un intervalle de $\mathbf{R}$. On note t la variable et

$$\vec{f}(t) = {}^t[f_1(t), \dots, f_d(t)].$$

Les fonctions scalaires $f_1, \dots, f_d$ s'appellent les fonctions coordonnées.

Définition.

- (i) On dit que $\vec{f}(t)$ a une limite quand t tend vers t_0 s'il existe $\vec{l} \in \mathbf{R}^d$ tel que $\|\vec{f}(t) - \vec{l}\|$ tend vers 0 quand t tend vers t_0 . On dit que $\vec{l}$ est la limite et on écrit : $\vec{f}(t) \rightarrow \vec{l}$ quand $t \rightarrow t_0$.
- (ii) On dit que $\vec{f}$ est continue en t_0 si $\vec{f}(t) \rightarrow \vec{f}(t_0)$ quand $t \rightarrow t_0$.
- (iii) On dit que $\vec{f}$ est continue sur I si $\vec{f}$ est continue en tout $t \in I$.
- (iv) On dit que $\vec{f}$ est dérivable en t_0 si $\frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}$ a une limite quand t tend vers t_0 . On note alors $\vec{f}'(t_0)$ cette limite.
- (v) On dit que $\vec{f}$ est dérivable sur I si $\vec{f}$ est dérivable en tout $t \in I$.

Proposition.

- (i) $\vec{f}(t) \rightarrow \vec{l}$ si et seulement si pour tout $i = 1, \dots, d$, $f_i(t) \rightarrow l_i$;
 - (ii) $\vec{f}$ est continue en t_0 si et seulement si pour tout i , f_i est continue en t_0 ;
 - (iii) $\vec{f}$ est dérivable en t_0 si et seulement si pour tout i , f_i est dérivable en t_0 ;
- on a alors $\vec{f}'(t_0) = {}^t[f'_1(t_0), \dots, f'_d(t_0)]$.

Théorème (inégalité des accroissements finis). Soit $\vec{f}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^d$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe M tel que $\|\vec{f}'(t)\| \leq M$ pour tout $t \in]a, b[$. Alors $\|\vec{f}(b) - \vec{f}(a)\| \leq M(b - a)$.

Définition. Soit $\vec{f}: I \rightarrow \mathbf{R}^d$. On dit qu'une fonction $F: I \rightarrow \mathbf{R}^d$ est une primitive de $\vec{f}$ si $\vec{F}$ est dérivable et pour tout $t \in I$, $\vec{F}'(t) = \vec{f}(t)$.

$\vec{F}$ est une primitive de $\vec{f}$ si et seulement si pour tout i , F_i est une primitive de f_i . Si $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont des primitives de $\vec{f}$ sur l'intervalle I , alors $\vec{F} - \vec{G}$ est un vecteur constant. Si $\vec{f}$ admet des primitives sur I , on définit pour $a, b \in I$ l'intégrale $\int_a^b \vec{f}(t) dt = \vec{F}(b) - \vec{F}(a)$, où $\vec{F}$ est une primitive quelconque de $\vec{f}$. On a $\int_a^b \vec{f}(t) dt = {}^t[\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_d(t) dt]$.

5. Equations différentielles linéaires

Une équation différentielle d'ordre n est une relation où apparaissent la variable x et une fonction inconnue $y = \varphi(x)$ ainsi que ses dérivées $y', \dots, y^{(n)}$ jusqu'à l'ordre n : $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Une solution est une fonction $y = \varphi(x)$ définie et n -fois dérivable sur un intervalle I telle que pour tout $t \in I$, on ait $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$. On cherche I le plus grand possible ; on dit alors que la solution est maximale. Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions. On ne considérera ici que les équations différentielles de la forme :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \quad (*)$$

où $a_1, \dots, a_n$ et b sont continues sur un intervalle I . Une telle équation est dite linéaire. Si $a_1, \dots, a_n$ sont constants, c'est une équation différentielle à coefficients constants. L'équation homogène associée est

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (**)$$

5.1. Equation scalaire d'ordre un

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (*)$$

On multiplie par le facteur intégrant $\mu(x) = \exp(\int^x a(t)dt)$ où $\int^x a(t)dt$ est une primitive de a . On obtient la solution générale

$$y = \frac{c}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int^x \mu(t)b(t)dt$$

On peut aussi utiliser la méthode générale :

Théorème A. Les solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ forment un espace vectoriel de dimension 1.

Théorème B. La solution générale de (*) est la somme de la solution générale de l'équation homogène (**) et d'une solution particulière de (*).

On résout l'équation homogène $y' = -a(x)y$ en séparant les variables. On peut trouver une solution particulière de $y' + a(x)y = b(x)$ par la méthode de la variation de la constante.

5.2. Equation scalaire d'ordre n

Théorème A. Les solutions de l'équation homogène

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (**)$$

forment un espace vectoriel de dimension n .

Théorème B. La solution générale de (*) est la somme de la solution générale de l'équation homogène (**) et d'une solution particulière de (*).

Dans le cas de coefficients constants, on cherche des solutions de l'équation homogène

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (**)$$

de la forme $y = e^{rx}$; on voit que r doit être racine de l'équation caractéristique :

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

En particulier, si l'équation caractéristique a n racines distinctes, $r_1, \dots, r_n$, la solution générale de l'équation homogène est

$$y = c_1 e^{r_1 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

où $c_1, \dots, c_n$ sont des scalaires.

Si b est un polynôme, une fonction exponentielle ou trigonométrique, on peut utiliser la méthode des coefficients indéterminés pour trouver une solution particulière de l'équation (*).

5.3. Equation vectorielle d'ordre un

Elle est de la forme

$$\vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t) \quad (*).$$

où $\vec{b}(t) \in \mathbf{R}^n$ et $A(t) \in M_n(\mathbf{R})$; on suppose $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto \vec{b}(t)$ continues sur l'intervalle I . On a encore

Théorème A. Les solutions de l'équation homogène $\vec{y}' = A(t)\vec{y}$ (**) forment un espace vectoriel de dimension n .

Théorème B. La solution générale de (*) est la somme de la solution générale de l'équation homogène (**) et d'une solution particulière de (*).

Dans le cas où A est constante, tout vecteur propre $\vec{x}$ de A , ($A\vec{x} = r\vec{x}$) définit la solution $\vec{y} = e^{rt}\vec{x}$ de (**). En particulier, si il existe une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ constituée de vecteurs propres de A , avec $A\vec{e}_i = r_i\vec{e}_i$, alors la solution générale de l'équation homogène (**) est

$$\vec{y} = c_1 e^{r_1 t} \vec{e}_1 + \dots + c_n e^{r_n t} \vec{e}_n$$

où $c_1, \dots, c_n$ sont des scalaires.