

APPROXIMATION

1. Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ $(n+1)$ -fois continûment dérivable. Pour tout $(a, x) \in I \times I$, on a l'égalité

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Formule de Taylor-Lagrange. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ $(n+1)$ -fois dérivable. Pour tout $(a, x) \in I \times I$, il existe c entre a et x tel que

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Formule de Taylor-Young. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ n -fois dérivable. Pour tout $a \in I$ et tout h tel que $a+h \in I$, on a

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$$

où $o(h^n)/h^n$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

Corollaire (CS du 2ème ordre). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ 2-fois dérivable. Soit $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. Alors f a un minimum local strict en a .

2. Développements limités

Notation Soient f, g définies dans un voisinage de a . On suppose $g(x) \neq 0$ pour $x \neq a$.

- (i) $f = o(g)$ au voisinage de a veut dire $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$.
- (ii) $f = O(g)$ au voisinage de a veut dire $\frac{f(x)}{g(x)}$ reste borné quand $x \rightarrow a$.
- (iii) $f \sim g$ au voisinage de a veut dire $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow a$.

Definition. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a s'il existe $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \dots + \alpha_n h^n + o(h^n)$$

quand $h \rightarrow 0$; $P(h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \dots + \alpha_n h^n$ s'appelle la partie polynomiale du développement limité.

On donne ci-dessous le développement limité au voisinage de 0 des fonctions usuelles. Ils sont obtenus à partir de la formule de Taylor. Ici, $n \in \mathbf{N}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.

à savoir par coeur :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ (1-x)^{-\alpha} &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} x^n + o(x^n) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \end{aligned}$$

à savoir retrouver :

$$\begin{aligned} \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2}) \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + o(x^8) \end{aligned}$$

Proposition. Si f admet un développement limité d'ordre n au point a , ce développement est unique.

Règles de calcul

- Si f et g admettent un développement limité d'ordre n au point a alors la combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité d'ordre n au point a . Sa partie polynomiale est $\lambda P + \mu Q$, où P et Q sont les parties polynomiales respectives de f et g .
- Si f et g admettent un développement limité d'ordre n au point a alors le produit fg admet un développement limité d'ordre n au point a . Sa partie polynomiale est obtenu en tronquant à l'ordre n le produit PQ des parties polynomiales respectives P et Q de f et g .
- Si f et g admettent un développement limité d'ordre n au point 0 et si $g(0) \neq 0$ alors le quotient f/g admet un développement limité d'ordre n au point 0 . Sa partie polynomiale est le quotient Q dans la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de la partie polynomiale A de f par la partie polynomiale B de g : $A = QB + x^{n+1}R$ et $\deg Q \leq n$.
- Si f et g admettent un développement limité d'ordre n au point 0 et si $g(0) = 0$ alors la composée $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n au point 0 . Sa partie polynomiale est obtenu en tronquant à l'ordre n la composée $P \circ Q$ des parties polynomiales respectives P et Q de f et g .

3. Fonctions vectorielles

La formule de Taylor avec reste intégral et la formule de Taylor-Young restent valides pour les fonctions vectorielles.

Formule de Taylor avec reste intégral. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et une fonction $\vec{f} : I \rightarrow \mathbf{R}^d$ $(n+1)$ -fois dérivable. Pour tout $(a, x) \in I \times I$, on a l'égalité

$$\begin{aligned} \vec{f}(x) = & \vec{f}(a) + \frac{\vec{f}'(a)}{1!}(x-a) + \frac{\vec{f}''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{\vec{f}^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ & + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \vec{f}^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Formule de Taylor-Young. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et une fonction $\vec{f} : I \rightarrow \mathbf{R}^d$ n -fois dérivable. Pour tout $a \in I$ et tout h tel que $a+h \in I$, on a

$$\vec{f}(a+h) = \vec{f}(a) + \frac{\vec{f}'(a)}{1!}h + \frac{\vec{f}''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{\vec{f}^{(n)}(a)}{n!}h^n + \vec{o}(h^n)$$

où $\vec{o}(h^n)/h^n$ tend vers 0 quand h tend vers 0 .

Application à l'étude des courbes paramétrées

Définition. Une courbe paramétrée dans le plan est une fonction vectorielle $\vec{f} : I \rightarrow \mathbf{R}^2$. Son image $\vec{f}(I)$ est appelée courbe définie par $\vec{f}$.

En cinématique, le paramètre t est le temps et $\vec{f}(t)$ est la position d'un point mobile au temps t . La dérivée $\vec{f}'(t)$, si elle existe, est le vecteur-vitesse au temps t , la dérivée seconde $\vec{f}''(t)$, si elle existe, est le vecteur-accélération au temps t .

Si $\vec{f}'(t)$ existe et est non nul, ce vecteur est tangent à la courbe. La formule de Taylor à l'ordre un :

$$\vec{f}(t) = \vec{f}(a) + \vec{f}'(a)(t - a) + \vec{o}(t - a)$$

donne l'équation paramétrique de la tangente à la courbe au point $\vec{f}(a)$:

$$\vec{x} = \vec{f}(a) + \vec{f}'(a)(t - a)$$

La proposition suivante complète l'étude locale des courbes paramétrées.

Proposition. Soit $\vec{f} : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée indéfiniment dérivable. Etant donné $a \in I$, on note (p, q) les plus petits entiers $p < q$ tels que la famille $(\vec{f}^{(p)}(a), \vec{f}^{(q)}(a))$ soit libre (si de tels entiers existent).

- (i) Si p est impair et q est pair, alors $\vec{f}(a)$ est un point ordinaire de la courbe.
- (ii) Si p est impair et q est impair, alors $\vec{f}(a)$ est un point d'inflexion de la courbe.
- (iii) Si p est pair et q est impair, alors $\vec{f}(a)$ est un point de rebroussement de première espèce de la courbe.
- (iv) Si p est pair et q est pair, alors $\vec{f}(a)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce de la courbe.