Examen 2ème session

Exercice 1

1/ $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dt}{t} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|t| + c \Rightarrow y = \frac{c}{t}$

2/ $y_p = t^2$

3/ $y = \frac{c}{t} + t^2$

4/ $y = -\frac{1}{t} + t^2$

Exercice 2

1/ $r^2 = r - \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1 \pm i}{2}$ $\qquad r_1, r_2$

2/ le cours dit que si l'équation caractéristique a 2 sol distinctes, alors la sol générale de l'équation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 est $y = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$

3/ il suffit de montrer que c'est vrai pour (r_1^n) et (r_2^n)

Or $|r_1| = |r_2| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, d'où $|r_i^n| \leq |r_i|^n$ ~~Tend~~

Donc $r_i^n \to 0$

Exercice 3

1/ IPP $\qquad u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}dx$

$\qquad dv = x^2 dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3}\ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x \Big|_1^2 - \frac{x^3}{9}\Big|_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$$

2/ $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \Rightarrow$ domaine $]-\infty, 2[\cup]2,3[\cup]3, +\infty[$

décomposition en elts simples

$$\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{3}{x^2-5x+6}$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

$$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} = x + 3\left(\ln|x-3| - \ln|x-2|\right)$$

$$= x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|$$

sur $]-\infty, 2[$ $\quad x + 3\ln\frac{3-x}{2-x}$

sur $]2, 3[$ $\quad x + 3\ln\frac{3-x}{x-2}$

sur $]3, +\infty[$ $\quad \cancel{x+3\ln\frac{3-x}{x-2}}$ $\quad x + 3\ln\frac{x-3}{x-2}$

Ex4

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

2/ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases}$ $\quad z=1$ $\quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ base de Ker u

Im u engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ libre $\Rightarrow$ base de Im u

3/ dim Ker u = 1 $\qquad$ dim Im u = 2

dim $\mathbb{R}^3$ = dim Im u + dim Ker u

$3 = 2 + 1$

Ex 5

Erreur fréquente : d.l. en 0 alors qu'on demande le d.l. en 1

Pour ne pas se tromper, on pose $x = 1+h$ $\quad (x \to 1 \iff u \to 0)$

$$x + x^2 = 1+h + 1 + 2h + h^2$$
$$= 2 + 3h + h^2$$
$$\exp(x+x^2) = \exp(2+3h+h^2)$$
$$= \exp(2)\exp(3h+h^2)$$

On pose $u = 3h+h^2$; $u \to 0$ qd $h \to 0$ et $u \sim 3h$

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

$$\exp(x+x^2) = \exp(2)\left(1 + 3h + h^2 + \frac{1}{2}(3h+h^2)^2 + o(h^2)\right)$$
$$= \exp(2)\left(1 + 3h + \frac{11}{2}h^2 + o(h^2)\right)$$

D'où $\quad f(x) = e^2 + 3e^2(x-1) + \frac{11e^2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

Ex6

1/a. si $x \to +\infty$ $\quad \ln\left(2+\frac{1}{x}\right) \to \ln 2 \Rightarrow x\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) \to +\infty$

b. si $x \to 0^+$ $\quad \ln\left(2+\frac{1}{x}\right) = \ln\frac{1+2x}{x} = \ln(1+2x) - \ln x$

$$x\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) = \underbrace{x\ln(1+2x)}_{\to 0} - \underbrace{x\ln x}_{\to 0} \to 0$$

2/ $\ln(2+h) = \ln\left(2\left(1+\frac{h}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{h}{2}\right)$

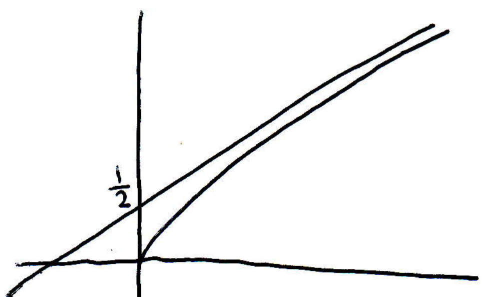
$$= \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)$$

3/ $f(x) = x\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) = x\left(\ln 2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$$= x\ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$y = x\ln 2 + \frac{1}{2}$ asymptote

$-\frac{1}{8}\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow$ courbe sous l'asymptote



Ex7

1/ f continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f admet des primitives
g est l'unique primitive de f telle que $g(0)=0$

2/ $g'=f$: donc g est continûment dérivable (C^1)

3/ linéarité de l'intégrale

$$\int_0^x \lambda f+\mu g = \lambda \int_0^x f + \mu \int_0^x g$$

$$T(\lambda f+\mu g) = \lambda Tf + \mu Tg$$

4/ On a vu que Tf est C^1
Rec^t, soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^1
Alors $f=g'$ est continue et $g=Tf$

Donc $\mathrm{Im}(T)=\{g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ C^1\}$

5/ On a vu que $g=Tf \Rightarrow g'=f$

Si $g=0$, $f=g'=0$. Donc $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$