Examen du 27 juin 2009

corrigé succint

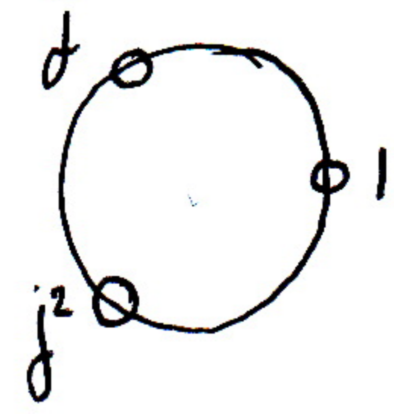
Exercice 1

1) Les racines complexes de P sont les racines $3^{\text{èmes}}$ de l'unité : $z^3 = 1$

On écrit $z = e^{i\theta}$; d'où $3\theta = 2k\pi$ et $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

Les 3 racines sont 1, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{P(X) = (X-1)(X-j)(X-j^2)}$$



Pour la décomposition sur $\mathbb{R}$, on regroupe

$(X-j)(X-\bar{j}) = X^2+X+1$ qui est irréductible sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{P(X) = (X-1)(X^2+X+1)}$$

2) On écrit $$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{(X-1)(X-j)(X-j^2)} = \frac{a_0}{X-1} + \frac{a_1}{X-j} + \frac{a_2}{X-j^2}$$

Pour calculer a_0, on multiplie par $X-1$ et on fait $X=1$. On obtient

$a_0 = \frac{1}{3}$

On obtient de même

$a_1 = \frac{j}{3}$ $\quad a_2 = \frac{j^2}{3}$

D'où $$\boxed{\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{j}{X-j} + \frac{j^2}{X-j^2}\right)}$$

Pour la décomposition sur $\mathbb{R}$, on regroupe

$$\frac{j}{X-j} + \frac{j^2}{X-j^2} = \frac{j(X-j^2)+j^2(X-j)}{(X-j)(X-j^2)} = \frac{-X-2}{X^2+X+1}$$

D'où $$\boxed{\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{X+2}{X^2+X+1}\right)}$$

4) Le dénominateur s'annule au seul point $x=1$ $(x \in \mathbb{R})$

f est continue sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. Elle admet donc une primitive sur chacun de ces intervalles.

Déterminons une primitive sur $]1, +\infty[$

$$\int \frac{1}{x-1}\, dx = \ln(x-1)$$

Pour calculer $\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx$, on fait d'abord apparaître la

dérivée $2x+1$ du dénominateur

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}$$

On a $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \ln(x^2+x+1)$

Il reste à calculer $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$. On se ramène à $\int \frac{1}{u^2+1}\,du$ par

un changement de variable : on écrit

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right]$$

On pose donc $u = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$, $du = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan u = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

En mettant tout ensemble :

$$\boxed{\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\left(\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)} \quad \text{sur }]1,+\infty[$$

de même $\quad = \frac{1}{3}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \quad$ sur $]-\infty,1[$

Exercice 2

1) On fait la division euclidienne de A par B

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^4 & +X^3 & & -2X+1 & X^2+X+1 \\
\cline{5-5}
X^4 & +X^3 & +X^2 & & X^2-1 \\
\cline{1-3}
 & & -X^2 & -2X+1 & \\
 & & -X^2 & -X-1 & \\
\cline{3-4}
 & & & -X+2 &
\end{array}$$

$A = (X^2-1)\,B \; -X+2$

On fait la division euclidienne de B par $R = -X+2$

$$\begin{array}{rr|l}
X^2 & +X+1 & -X+2 \\
\cline{3-3}
X^2 & -2X & -X-3 \\
\cline{1-2}
 & 3X+1 & \\
 & 3X-6 & \\
\cline{2-2}
 & 7 &
\end{array}$$

$$B = (-X-3)R + 7$$

Le dernier reste non nul, 7, est le PGCD de A et B
Comme le PGCD est défini à un multiple scalaire non nul près, on peut dire $\boxed{PGCD(A,B) = 1}$

2) Par définition du PGCD, A et B sont premiers entre eux

3)
$$7 = B + (X+3)R$$
$$R = A - (X^2-1)B \quad \text{d'où}$$
$$7 = B + (X+3)A - (X+3)(X^2-1)B$$
$$= (X+3)A + (1-(X+3)(X^2-1))B$$
$$= UA + VB$$

avec $\boxed{U = X+3}$ et $\boxed{V = 1-(X+3)(X^2-1) = -X^3-3X^2+X+4}$

Exercice 3

1) On fait une intégration par parties

$$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = x\,dx \qquad v = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int_1^2 x(\ln x)\,dx = \int_1^2 u\,dv = uv\Big|_1^2 - \int_1^2 v\,du = \frac{1}{2}x^2(\ln x)\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2}{x}\,dx$$
$$= 2\ln 2 - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^2 = \boxed{2\ln 2 - \frac{3}{4}}$$

2) On fait un changement de variable

$$u = \arctan x \qquad du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u\,du = \frac{1}{2}u^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\pi^2}{32}}$$

Exercice 4

1) On peut écrire u vectoriellement :

$$u(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ -4x-y+2z \\ -2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ce qui montre que u est l'application linéaire donnée par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) Le noyau de u est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ constitué des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} x+y-z = 0 \\ -4x-y+2z = 0 \\ -2x+y = 0 \end{cases}$$

Par la méthode du pivot de Gauss, on transforme ce système en un système triangulaire équivalent

$$\begin{cases} x+y-z = 0 \\ 3y-2z = 0 \\ 3y-2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-z = 0 \\ 3y-2z = 0 \end{cases}$$

La solution générale est de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

le noyau est donc la droite vectorielle $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$ en est une base

3) Le théorème du rang dit que $\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Comme $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, $\boxed{\dim \operatorname{Im} u = 2}$

4) On cherche λ et μ tels que $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

La 3ème composante donne $\lambda = -2$ et la 1ère donne $\mu = -3$ et on vérifie que cela marche.

On sait que les vecteurs colonne de A engendre Im u. Comme la 1ère colonne est combinaison linéaire des deux autres, $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$. Comme $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension 2, c'est une base de $\mathrm{Im}\, u$

5) On calcule le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2(-1) + 3(-1) = 1 \neq 0$

$(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$

6) On trouve $u(\vec{f_1}) = \vec{0}$ $\quad (\vec{f_1} \in \mathrm{Ker}\, u)$

$$u(\vec{f_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{f_2}$$

$$u(\vec{f_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{f_3}$$

7) La matrice B de u dans la base $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8) Les colonnes de P sont les composantes de $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

9) $B = P^{-1} A P$

10) On calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B$$

Exercice 5

1) On doit avoir $x \neq 0$

Si $x > 0$, $e^x > e^0 = 1$ donc $\frac{e^x - 1}{x} > 0$ et $\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ est défini

Si $x < 0$ $e^x < e^0 = 1$ donc $\frac{e^x - 1}{x} > 0$ et $\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ est défini

Le domaine de f est donc $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$

2) On suppose $x > 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left(\ln(e^x - 1) - \ln x\right) \\ &= \frac{1}{x}\ln(e^x - 1) - \frac{1}{x}\ln x \\ &= \frac{1}{x}\ln\left(e^x(1 - e^{-x})\right) - \frac{1}{x}\ln x \\ &= \frac{1}{x}\ln e^x + \frac{1}{x}\ln(1 - e^{-x}) - \frac{1}{x}\ln x \\ &= 1 + \frac{1}{x}\ln(1 - e^{-x}) - \frac{1}{x}\ln x \end{aligned}$$

Si $\underline{x \to +\infty}$, $\frac{\ln x}{x} \to 0$ et $e^{-x} \to 0$; donc $\frac{1}{x}\ln(1 - e^{-x}) \to 0$
et $\underline{f(x) \to 1}$

On suppose $x < 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left(\ln(1 - e^x) - \ln(-x)\right) \\ &= \frac{1}{x}\ln(1 - e^x) + \frac{\ln|x|}{|x|} \end{aligned}$$

Si $\underline{x \to -\infty}$, $e^x \to 0$, $\frac{1}{x}\ln(1 - e^x) \to 0$ et $\frac{\ln|x|}{|x|} \to 0$, donc
$\underline{f(x) \to 0}$

3) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) = 1 + u \quad \text{avec } u \to 0 \text{ qd } x \to 0$$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \ln(1 + u) &= u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \\ &= \boxed{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)} \end{aligned}$$

4) On en déduit que $f(x)$ admet un développement limité

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{24} + o(x)$$

au voisinage de 0. En particulier $\boxed{f(x) \to \frac{1}{2}}$ quand $x \to 0$.

Voici le graphe de f