Examen du 19 mai 2008

Corrigé de quelques exercices

Exercice 3

1/ L'écriture matricielle de u est

$$Y = AX$$

où $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} u_1(x,y,z) \\ u_2(x,y,z) \\ u_3(x,y,z) \end{bmatrix}$

Ceci montre la linéarité de u

2/ $u(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x + y - 2z = 0 \\ 6x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$

On utilise la méthode de Gauss pour résoudre ce système

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$

On exprime y et x en fonction de z :

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3} z \\ x = \frac{1}{3} z \end{cases}$$

C'est l'équation d'une droite vectorielle

On peut choisir $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ comme base

3/ $\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

Donc $\dim \operatorname{Im} u = 3 - 1 = 2$

4/ Il s'agit de montrer que

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 4x + y - 2z &= 1 \\ 6x + 3y - 4z &= 1 \end{aligned}$$

admet une solution. On utilise la méthode de Gauss

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ \quad -3y + 2z = 1 \\ \quad -3y + 2z = 1 \end{cases}$$

on peut prendre $x = 0$, $y = z = -1$

De même, il s'agit de montrer que

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 4x + y - 2z &= 0 \\ 6x + 3y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

admet une solution. En utilisant la même méthode, on trouve que $x = 0$, $y = 2$, $z = 1$ convient

remarque : on aurait pu remarquer que $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est $C_1 - C_2$

et $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ est $2C_2 + C_3$ où C_i est la colonne i de A

La famille $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ est libre :

si $\lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad \begin{aligned} \mu &= 0 \\ \lambda &= 0 \\ \lambda + 2\mu &= 0 \end{aligned}$

Comme $\mathrm{Im}\,u$ est de dimension 2, c'est une base de $\mathrm{Im}\,u$

5/ On calcule $\det(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$

Donc $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$

6/ On a déjà vu que $u(\vec{f_1}) = \vec{0}$

$$u(\vec{f_2}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\vec{f_2}$$

$$u(\vec{f_3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -\vec{f_3}$$

7/ Par définition, la matrice B de u dans la base $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ est $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

8/ On a $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -B$

D'où $\quad u \circ u = -u$

Exercice 4

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

On fait la division suivant les puissances croissantes de $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ par $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ à l'ordre 5

$$\begin{array}{llll|l}
x & +\frac{1}{6}x^3 & +\frac{1}{120}x^5 & & 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4 \\
x & +\frac{1}{2}x^3 & +\frac{1}{24}x^5 & & x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5 \\
\hline
 & -\frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{30}x^5 & & \\
 & -\frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{6}x^5 & -\frac{1}{72}x^7 & \\
\hline
 & & \frac{2x^5}{15} & +\frac{1}{72}x^7 &
\end{array}$$

$$x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} = \left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+x^7R(x)$$

D'où $\quad \tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$

Exercice 5

1) IPP $\quad u = \arctan x \qquad du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$\qquad dv = dx \qquad v = x$

$$\int_0^1 \arctan x = x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

chgt de variable

$u = 1+x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2$$

2) chgt de variable $X = e^x \Rightarrow dX = e^x dx = X\,dx$

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{X+1}\,\frac{1}{X}\,dX$$

décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{X+1}\,\frac{1}{X} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$$

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{X}\,dX - \int \frac{1}{X+1}\,dX = \ln X - \ln(X+1)$$

$$= \ln \frac{X}{X+1} = \ln \frac{e^x}{e^x+1} \quad (+\text{constante})$$

Exercice 6

1/ défini si $x^3 - 3x + 2 \neq 0$

ce polynôme se factorise comme

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

Il a 2 racines : 1 et -2

$f(x)$ défini si $x \notin \{1, -2\}$

2/ si $x \to +\infty$, $\frac{1}{x^3-3x+2} \to 0$, $\exp\left(\frac{1}{x^3-3x+2}\right) \to 1$

donc $f(x) \to +\infty$

si $x \to 1^+$, $(x-1) \to 0^+$ $\exp\left(\frac{1}{x^3-3x+2}\right) \to +\infty$

l'exponentielle impose sa limite, donc $f(x) \to +\infty$

3/ $\frac{1}{x^3-3x+2} = \frac{u^3}{1-3u^2+2u^3} = u^3 + o(u^3) = v$

$$\exp \frac{1}{x^3-3x+2} = \exp v = 1 + v + o(v)$$

$$= 1 + u^3 + o(u^3) \qquad (u \to 0^+)$$

4/ $f(x) = (x-1)\left(1 + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$

$f(x) - (x-1) = (x-1)\left(\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$

le second membre tend vers 0 qd $x \to +\infty$:

f est asymptote à la droite $y = x - 1$

comme $\frac{x-1}{x^3}\left(1 + o(1)\right) > 0$ pour x assez grand

le graphe est au-dessus de l'asymptote.