Examen du 18 mai 2010

corrigé succinct

Exercice 1

1) f est définie si $1+2x$ et $x \neq 0$, d'où les intervalles de définition

$]-\frac{1}{2}, 0[$ et $]0, +\infty[$

2) $\int \frac{\ln(1+2x)}{x^2}\,dx = \int u\,dv$ avec

$u = \ln(1+2x)$ $\quad du = \frac{2}{1+2x}\,dx$

$dv = \frac{dx}{x^2}$ $\quad v = -\frac{1}{x}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du = -\frac{\ln(1+2x)}{x} + \int \frac{2}{x(1+2x)}\,dx$$

$$\frac{2}{x(1+2x)} = \frac{2}{x} - \frac{4}{1+2x}$$

$$\int \frac{2}{x(1+2x)}\,dx = 2\ln|x| - 2\ln(|1+2x|) = 2\ln\left|\frac{x}{1+2x}\right|$$

D'où

$$\int \frac{\ln(1+2x)}{x^2}\,dx = \begin{cases} -\frac{\ln(1+2x)}{x} + 2\ln\frac{-x}{1+2x} & \text{sur }]-\frac{1}{2}, 0[\\ -\frac{\ln(1+2x)}{x} + 2\ln\frac{x}{1+2x} & \text{sur }]0, +\infty[\end{cases}$$

Exercice 2

1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

2) a) $\mathcal{B}$ est libre car $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1+2 = 3 \neq 0$

C'est donc une base de $\mathbb{R}^2$

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Le calcul donne $P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

3 a) $U' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = \overbrace{P^{-1}AP}\,\overbrace{P^{-1}X} = DU$

b) $u' = 6u \Rightarrow u = c\exp(6t)$ où $c \in \mathbb{R}$

$v' = 9v \Rightarrow v = d\exp(9t)$ où $d \in \mathbb{R}$

c) $X = PU = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ce^{6t} \\ de^{9t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ce^{6t} - de^{9t} \\ 2ce^{6t} + de^{9t} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = ce^{6t} - de^{9t} \\ y = 2ce^{6t} + de^{9t} \end{cases}$

Exercice 3

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

$(1-y)^{-\alpha} = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}y^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!}y^n + o(y^n)$

on remplace y par $-x$ et α par $-\frac{1}{2}$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

2. $e^{\frac{x}{2}} \cos 2x = \left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)\left(1-2x^2+o(x^3)\right)$
$= 1+\frac{x}{2}-\frac{15}{8}x^2+o(x^2)$

$\sqrt{1+x} - \ln(1+x) = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$
$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)$

3) $f(x) = \dfrac{1+\frac{x}{2}-\frac{15}{8}x^2+o(x^2)}{1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)}$

On fait une division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de $1+\frac{x}{2}-\frac{15}{8}x^2$ par $1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2$

$$1+\frac{x}{2}-\frac{15}{8}x^2 = \left(1+x-\frac{7}{4}x^2\right)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2\right)+x^3R$$

D'où $f(x) = 1+x-\frac{7}{4}x^2+o(x^2)$

4) équation de la tangente

$y = 1+x$

comme $-\frac{7}{4}x^2 < 0$ pour $x \neq 0$, le graphe est dessous la tangente.

Exercice 4

1) On calcule le déterminant

$$\det_{S3}(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

La famille $\mathcal{B}$ est libre ; dans un espace vectoriel de dimension 3, une famille libre de 3 vecteurs est une base.

2) Les colonnes de P sont les composantes des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne base :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3)

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\ \right|\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\ \right|\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\ \right|\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\ \right|\ \begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Comme $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est une base, tout $\vec{x} \in E$ s'écrit uniquement

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 + \lambda_3 \vec{f}_3 \quad \text{où } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

On définit

$$u(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$$

Cette application est la seule possible d'après la linéarité de u

cette application est linéaire par construction.

Sa matrice $A = [u]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ dans les bases $\mathcal{C}$ de E et $\mathcal{B}$ de F

a pour colonnes les composantes de $u(\vec{f}_1), u(\vec{f}_2), u(\vec{f}_3)$ dans

la base $\mathcal{B}$ de F :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5) On sait que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Or la famille $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ n'est pas libre. Par exemple $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$

On vérifie que $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Im} u$

$\operatorname{rang}(u) = \dim \operatorname{Im} u = 2$

$\dim \operatorname{Ker} u = \dim E - \operatorname{rang}(u) = 3 - 2 = 1$

6) $[u]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [u \circ I]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} [I]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$

Par définition, $P = [I]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$. Donc $[I]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = P^{-1}$

$$[u]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = AP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

7) On travaille dans la base canonique $\mathcal{B}$. Il s'agit de trouver les solutions de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c.a.d

$$\begin{aligned} x \quad\quad + 2z &= 0 \\ -2x - y + z &= 0 \\ -x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

on remarque que, par exemple, la deuxième ligne est superflue

on fixe z et on résout

$$\begin{aligned} x \quad &= -2z \\ x + y &= -3z \end{aligned} \quad , \text{ d'où } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ est une base de $\operatorname{Ker} u$

Exercice 5

1)
$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + \mu Q)(X) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) \\ &= \lambda\,(P(X+1) - P(X)) + \mu\,(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda\,\Delta P(X) + \mu\,\Delta Q(X) \\ &= (\lambda\,\Delta P + \mu Q)(X) \end{aligned}$$

On peut remarquer que si $P(X) = a_n X^n + \dots + a_0$ est un polynôme de degré n, $\Delta P(X) = a_n (X+1)^n + \dots - a_n X^n - \dots$ est un polynôme de degré $n-1$.

2)
$$\begin{aligned} \Delta 1\,(X) &= 1(X+1) - 1(X) = 1 - 1 = 0 \\ \Delta X &= X + 1 - X = 1 \\ \Delta X^2 &= (X+1)^2 - X^2 = X^2 + 2X + 1 - X^2 = 2X + 1 \\ \Delta X^3 &= (X+1)^3 - X^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1 \end{aligned}$$

3. $\mathbb{R}_3[X]$ admet $(1, X, X^2, X^3)$ pour base

Comme $\Delta 1$, ΔX, ΔX^2 et ΔX^3 appartiennent à $\mathbb{R}_3[X]$ (en fait à $\mathbb{R}_2[X] \subset \mathbb{R}_3[X]$), Δ envoie $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même
c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

4. La matrice de Δ_3 dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Les solutions de $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\ker \Delta_3 = \{$polynômes constants$\}$

$\operatorname{Im} \Delta_3$ est le sous-espace vectoriel engendré par $(1, 2X+1, 3X^2+3X+1)$; cette famille est libre et engendre $\mathbb{R}_2[X]$

$\operatorname{Im} \Delta_3 = \mathbb{R}_2[X]$

6. On montre $P(n) = 0$ par récurrence

* vrai pour $n = 0$
* si vrai pour n $\quad P(n+1) = P(n+1) - P(n) + P(n)$
$$= \Delta P(n) + P(n) = 0 + 0 = 0$$

P a une infinité de racines : il est donc nul.

Si $P(0) \neq 0$, on considère $Q = P - P(0)$

on a $\Delta Q = \Delta P - P(0)\Delta 1 = 0 - 0 = 0$

$\quad Q(0) = P(0) - P(0) = 0$

D'après ce qui précède, $Q = 0$ donc $P = P(0)$

D'où $\operatorname{Ker} \Delta = \{$polynômes constants$\}$

7. On remarque que $\deg \Delta X^n = n - 1$

La famille $(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^n)$ étant échelonnée, c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \operatorname{Im} \Delta$ pour tout n

Donc $\mathbb{R}[X] \subset \operatorname{Im} \Delta$. D'où $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}[X]$.