Examen partiel du 21 Mars 2008

Corrigé succint

Ex 1 On divise A par B

$A = QB + R$

$Q = X+1$; $R = X^2 - X - 20$

$$
\begin{array}{l|l}
X^4 + 4X^3 + X^2 \qquad -16 & X^3 + 3X^2 - 3X + 4 \\
\underline{X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 4X} & \hline
\quad X^3 + 4X^2 - 4X - 16 & X + 1 \\
\quad \underline{X^3 + 3X^2 - 3X + 4} & \\
\qquad X^2 - X - 20 &
\end{array}
$$

On divise B par R

$B = Q_1 R + R_1$

$Q_1 = X + 4$;

$R_1 = 21X + 84$

$$
\begin{array}{l|l}
X^3 + 3X^2 - 3X + 4 & X^2 - X - 20 \\
\underline{X^3 - X^2 - 20X} & \hline
\quad 4X^2 + 17X + 4 & X + 4 \\
\quad \underline{4X^2 - 4X - 80} & \\
\qquad 21X + 84 &
\end{array}
$$

On divise R par R_1

$R = Q_2 R_1 + R_2$

$Q_2 = \frac{1}{21}X - \frac{105}{21 \times 21}$

$R_2 = 0$

$$
\begin{array}{l|l}
X^2 - X - 20 & 21X + 84 \\
\underline{X^2 + \frac{84}{21}X} & \hline
\quad -\frac{105}{21}X - 20 & \frac{1}{21}X - \frac{105}{21 \times 21} \\
\quad \underline{-\frac{105}{21}X - \frac{105 \times 84}{21 \times 21}} & \\
\qquad 0 &
\end{array}
$$

PGCD(A,B) = dernier reste non nul

$= 21X + 84 = 21(X+4)$

le PGCD étant défini à un multiple scalaire non nul près, on peut prendre aussi

$\boxed{\text{PGCD}(A,B) = X+4}$

On a $R_1 = -Q_1 R + B = -Q_1(A - QB) + B = -Q_1 A + (Q_1 Q + 1) B$

$= UA + VB$ avec

$U = -Q_1 = -X - 4$

$V = Q_1 Q + 1 = (X+4)(X+1) + 1 = X^2 + 5X + 5$

Ex 2

$$
\begin{array}{l|l}
1 - 2X \qquad + X^3 + X^4 & 1 + X + X^2 \\
\underline{1 + X + X^2} & \hline
\quad -3X - X^2 + X^3 + X^4 & 1 - 3X + 2X^2 \\
\quad \underline{-3X - 3X^2 - 3X^3} & \\
\qquad 2X^2 + 4X^3 + X^4 & \\
\qquad \underline{2X^2 + 2X^3 + 2X^4} & \\
\qquad\qquad 2X^3 - X^4 &
\end{array}
$$

d'où $A = QB + X^3 R$ avec $Q = 1 - 3X + 2X^2$ et $R = 2 - X$

$$\frac{P}{Q} = \frac{1-2X+X^3+X^4}{X^3(1+X+X^2)} = \frac{A}{X^3 B} = \frac{Q}{X^3} + \frac{R}{B} = \frac{1}{X^3} - \frac{3}{X^2} + \frac{2}{X} + \frac{2-X}{1+X+X^2}$$

C'est la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q}$ car

① $Q = X^3(1+X+X^2)$ est la factorisation de Q en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$

② cette décomposition est de la bonne forme

③ la décomposition en elts simples sur $\mathbb{R}$ est unique

Ex 3

1) arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$

Comme x^2+x+1 ne s'annule pas, g est aussi définie sur $\mathbb{R}$

2) f et g sont dérivables car composées de fonctions dérivables ;

le calcul donne

$$f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-(1+2x)}{[1+(1+x)^2]\,(1+x^2)}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2} \times \frac{-(1+2x)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{-(1+2x)}{(1+x+x^2)^2+1}$$

En développant, on trouve que les dénominateurs sont égaux

d'où $f'(x) = g'(x)$

3) Comme $g-f$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, $g-f =$ constante

En évaluant $g-f$ en 0, on trouve

constante $= g(0) - f(0) = \arctan 1 - (\arctan 1 - \arctan 0) = 0$

Ex 4

1) On fait une intégration par parties

$u = \arctan x \qquad du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$dv = x\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

D'où $$\int_0^1 x \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2}\arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x^2)}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on écrit

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

(ce qui est en fait la décomposition en elts simples sur $\mathbb{R}$)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = x\Big|_0^1 - \arctan x\Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

D'où $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,dx = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$

2) Pour éliminer le radical $\sqrt{1+t^2}$ on fait le changement de variable $t = \tan x$

Pour faire varier t de 0 à 1, on fait varier x de 0 à $\frac{\pi}{4}$

On a $dt = (1+\tan^2 x)\,dx$

D'où

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 x)\sqrt{1+\tan^2 x}}(1+\tan^2 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $\cos x \geqslant 0$)

Ex 5

1) On introduit $Y = X^2$

$$X^4 - 4X^2 + 4 = Y^2 - 4Y + 4 = (Y-2)^2 = (X^2-2)^2$$

Comme $X^2 - 2 = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ on obtient

$$X^4 - 4X^2 + 4 = (X-\sqrt{2})^2(X+\sqrt{2})^2$$

2) La forme générale de la décomposition en éléments simples est

$$\frac{4X^3}{X^4-4X^2+4} = \frac{4X^3}{(X-\sqrt{2})^2(X+\sqrt{2})^2} = \frac{a}{(X-\sqrt{2})^2} + \frac{b}{X-\sqrt{2}} + \frac{c}{(X+\sqrt{2})^2} + \frac{d}{X+\sqrt{2}}$$

on multiplie par $(X-\sqrt{2})^2$ et on fait $X=\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $a = \sqrt{2}$

$(X+\sqrt{2})^2$ $\quad X = -\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $c = -\sqrt{2}$

X $\quad X \to +\infty$ $\Rightarrow$ $b + d = 4$

on fait $X = 0$ $\Rightarrow$ $-b + d = 0$

D'où $b = d = 2$ et

$$\frac{4x^3}{x^4 - 4x^2 + 4} = \frac{\sqrt{2}}{(x-\sqrt{2})^2} + \frac{2}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{(x+\sqrt{2})^2} + \frac{2}{x+\sqrt{2}}$$

3) $x \mapsto R(x)$ est définie, continue et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, -\sqrt{2}[$, $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, $]\sqrt{2}, +\infty[$

4) On a

$$\int R(x)\,dx = \frac{4}{2-x^2} + 2\ln|2-x^2|$$

soit sur $]-\infty, -\sqrt{2}[$ $\quad \frac{4}{2-x^2} + 2\ln(x^2-2)$

sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ $\quad \frac{4}{2-x^2} + 2\ln(2-x^2)$

sur $]\sqrt{2}, +\infty[$ $\quad \frac{4}{2-x^2} + 2\ln(x^2-2)$