Université d'Orléans-Tours
Math
M2MA

5 septembre 2017

Problème n° 1

Soient A, B et C trois groupes abéliens. On appellera forme biadditive de $A \times B$ dans C une application f de $A \times B$ dans C qui vérifie les conditions suivantes :

$$\forall a \in A, \forall a' \in A, \forall b \in B \qquad f(a+a',b) = f(a,b) + f(a',b)$$

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \forall b' \in B \qquad f(a,b+b') = f(a,b) + f(a,b')$$

I Formes sesquilinéaires symétriques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$. On appelle **forme sesquilinéaire** sur E une forme biadditive b de $E \times E$ dans $\mathbf{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \forall x \in E, \forall y \in E \qquad b(\lambda x, y) = \lambda b(x,y) \qquad b(x, \lambda y) = \overline{\lambda} b(x,y)$$

Un telle forme b est dite **symétrique** si l'on a :

$$\forall x \in E, \forall y \in E \qquad b(x,y) = \overline{b(y,x)}$$

Une forme b sesquilinéaire symétrique sur E est dite **définie positive** (resp. **définie négative**) sur un sous-espace vectoriel F de E si pour tout vecteur non nul x de F, $b(x,x)$ est un réel strictement positif (resp. strictement négatif).

On appellera **espace sesquilinéaire** un couple (E,b) où b est une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbf{C}$. Un espace sesquilinéaire (E,b) est dit **symétrique** si la forme b est symétrique.

Si (E,b) est un espace sesquilinéaire symétrique, l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E est noté $F^{\perp}$. C'est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $b(x,y) = 0$ pour tout $y \in F$.

Une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ d'un espace sesquilinéaire symétrique (E, b) est dite orthogonale si $b(e_i, e_j)$ est nul pour tous $i \neq j$. On dira qu'elle est **semi-orthonormée** si elle est orthogonale et si de plus $b(e_i, e_i)$ est, pour tout i, égal à 1, 0 ou -1.

1) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. On suppose b non nulle. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $b(x, x)$ soit non nul. Montrer qu'il existe un vecteur $y \in E$ tel que $b(y, y)$ soit égal à 1 ou à -1.

2) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée de (E, b).

3) On suppose que E est l'espace vectoriel $\mathbf{C}^2$ et que la forme b est définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Construire une base semi-orthonormée de (E, b).

4) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base semi-orthonormée de (E, b). Soit E_+ (resp. E_-, E_0) le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs e_i vérifiant $b(e_i, e_i) = 1$ (resp. $b(e_i, e_i) = -1$, $b(e_i, e_i) = 0$). Soit F un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que $F \cap (E_- \oplus E_0)$ est nul si b est définie positive sur F et que $F \cap (E_+ \oplus E_0)$ est nul si b est définie négative sur F.

b) En déduire que le nombre $\sum_i b(e_i, e_i)$ est indépendant de $\mathcal{B}$. Ce nombre sera noté $\sigma(E, b)$ ou simplement $\sigma(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

5) Soient $n > 0$ un entier et E l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Soit b la forme sesquilinéaire sur E vérifiant :

$$b(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i + j = n + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer le nombre $\sigma(E)$.

6) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit x un vecteur non nul de E.

a) On suppose que x appartient à $E^\perp$. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ telle que : $x = e_1$.

b) On suppose que $b(x, x)$ est non nul. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et un réel $\lambda > 0$ tels que : $x = \lambda e_1$.

c) On suppose que $b(x, x)$ est nul et que x n'appartient pas à $E^\perp$. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ telle que : $x = e_1 + e_2$.

7) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit $F = \mathbf{C}x$ le sous-espace vectoriel de E engendré par un vecteur non nul $x \in E$ et $G = F^\perp$ son orthogonal. Déterminer l'espace G suivant les cas examinés dans la question 6. Montrer que l'on a dans tous les cas : $\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(G)$.

8) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $G = F^\perp$ son orthogonal. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base semi-orthonormée de (F, b). Pour tout $i \leq p$ notons F_i le sous-espace vectoriel engendré

Tournez la page S.V.P.

par les vecteurs u_j, $j \leq i$, et G_i l'orthogonal $F_i^{\perp}$ de F_i. Déterminer (en fonction de $\sigma(E)$) les nombres $\sigma(F_i) + \sigma(G_i)$. En déduire la formule :

$$\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(F^{\perp})$$

$$E = F \oplus F^{\perp} = F \oplus {}^{\perp}F$$