Université d'Orléans-Tours 5 septembre 2017
Département de Mathématiques
M2MA

Feuille d'exercices n^0 1

Exercice 1

Soient q_1, q_2, q_3 les formes quadratiques sur $\mathbf{R}^3$ définies pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ par

a) $q_1(x, y, z) = x^2 - 2xy + z^2$.

b) $q_2(x, y, z) = 2xy + 2yz$.

c) $q_3(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2xz$.

Pour chacune de ces formes quadratiques, déterminer sa matrice, son rang, son noyau et préciser si elle est non dégénérée ou définie.

Exercice 2

Soient f une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E et q la forme quadratique associée. Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) F et G sont orthogonaux ;

(ii) $F \subset G^\perp$ et

(iii) $G \subset F^\perp$.

b) Montrer que $F \subset F^\perp \Leftrightarrow F \subset C(q)$.

c) Soient x et y des vecteurs de E isotropes. Montrer que $x + y$ est isotrope si et seulement si x et y sont orthogonaux.

Exercice 3

Soient f une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E et q la forme quadratique associée. Soient $u \in E$ un vecteur non isotrope et D la droite engendrée par u.

a) Montrer que pour tout $v \in E$, le vecteur $v - \frac{f(u,v)}{q(u)}u$ appartient à $D^\perp$.

b) En déduire que $E = D \oplus D^\perp$.

Exercice 4

On considère les applications q_1, q_2 et q_3 de $\mathbf{R}[X]$ dans $\mathbf{R}$ définies, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$ par

$$q_1(P) = 2P(1)P'(0); \quad q_2(P) = P(-1)P(0)P(1); \quad q_3(P) = |P(-1)P(1)|.$$

Parmi ces applications, déterminer celles qui sont des formes quadratiques. Dans ce cas, donner la forme polaire associée.

Exercice 5

Soit q la forme quadratique sur $\mathbf{R}^4$ définie pour tout (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$ par

$$q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2xz - 2zt.$$

a) Déterminer la matrice de q dans la base canonique $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ de $\mathbf{R}^4$. La forme quadratique q est-elle dégénérée ?

b) Déterminer $F^\perp$, $F \cap F^\perp$ et $dim(F) + dim(F^\perp)$ lorsque F est le sous-espace vectoriel suivant :

(i) $F = D = Vect(\epsilon_1)$;

(ii) $F = P = Vect(\epsilon_3, \epsilon_4)$.

Exercice 6

Etant donné un nombre réel a, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire la forme quadratique $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ qui a A pour matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

2. Déterminer la signature de q et son rang en fonction de a.

3. Montrer qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle la forme quadratique est positive. La forme quadratique q est-elle alors définie positive ?

Exercice 7

Opérer la réduction de Gauss et déterminer noyau, rang, signature et base orthogonale, pour les formes quadratiques suivantes :

a) $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 8z^2 - 2xy + 4xz$;

b) $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz - 6yz$;

c) $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = xy + yz$;

d) $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx)$.

Exercice 8

Soit $M_n(\mathbf{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

a) Montrer que $A \mapsto \mathrm{Trace}(A\,{}^tA)$ est une forme quadratique définie positive sur $M_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que $A \mapsto \mathrm{Trace}(A^2)$ est une forme quadratique sur $M_n(\mathbf{R})$. Qelle est sa signature ?