Université d'Orléans 10 octobre 2017
Département de Mathématiques
M2MA

Feuille d'exercices n^0 2

Exercice 1
Opérer la réduction de Gauss et déterminer noyau, rang, signature et base orthogonale, pour les formes quadratiques suivantes :
a) $q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 4zt$;
b) $q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $q(x, y, z, t) = xy + 2xz + xt + 2yt + 4zt$.

Exercice 2
Dans $\mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{B}$, on considère $v_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $v_2 = (0, 3, 1, -1)$ et $F = Vect(v_1, v_2)$.
Déterminer une base orthogonale et un système d'équations de $F^\perp$.

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et q une forme quadratique.
a) On suppose que q est définie positive. Montrer que pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E on a :

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

b) Ce résultat est-il vrai pour une forme quadratique non dégénérée quelconque ?

Exercice 4
Dans $\mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{B}$, on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{x \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}.$$

Déterminer la matrice, relativement à $\mathcal{B}$, de la projection orthogonale sur F et de la symétrie orthogonale par rapport à F.

Exercice 5
Soient E est un espace vectoriel sur K de dimension finie et $q : E \to K$ est une forme quadratique non dégénérée dont on note f la forme polaire et u un endomorphisme de E.
1) On suppose que K est un corps infini. Prouver que si, pour tout vecteur x non isotrope, $u(x)$ est isotrope, alors, pour tout vecteur $y \in E$, $u(y)$ est isotrope. (On pourra utiliser la théorie des polynômes à plusieurs indéterminées.)

2) Prouver que le résultat précédent est encore valable si on suppose seulement $\mathrm{card}(K) \neq 3$. (Etant donné un vecteur isotrope y, on pourra considérer un vecteur non isotrope x, et étudier les scalaires α tels que $y + \alpha x$ ne soit pas isotrope.)

3) Soit K un corps à trois éléments, $E = K^2$ et q la forme quadratique

$$q(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 - \xi_2^2.$$

a) Déterminer les vecteurs non isotropes de q.

b) Construire un automorphisme u de E tel que pour tout vecteur x non isotrope, $u(x)$ soit isotrope.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K de caractéristique différente de 2 et $q : E \to K$ une forme quadratique. Etant donné un sous-espace vectoriel F de E, on note $F^\perp$ son q-orthogonal.

1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la restriction $q_{|F} : F \to K$ est non dégénérée,

(ii) $E = F \oplus F^\perp$,

(iii) $F \cap F^\perp = \{0\}$.

2) Ces conditions sont-elles équivalentes à

(iv) $q_{|F^\perp} : F^\perp \to K$ est non dégénérée ?