Université d'Orléans-Tours
Département de Mathématiques
M2MA

17 octobre 2018

Feuille d'exercices n^0 3

Exercice 1

Soit K un corps de caractéristique différente de 2. On appelle espace quadratique (E, q) un espace vectoriel E sur K muni d'une forme quadratique $q : E \to K$. Soit (E, q) un espace quadratique de dimension 2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) (E, q) est isomorphe à $(K^2, x^2 - y^2)$;
(ii) q est non dégénérée et il existe un vecteur isotrope non nul ;
(iii) (E, q) est isomorphe à (K^2, axy) avec $a \in K^*$;
(iv) le discriminant de q est égal à (-1) modulo K^{*2}.

Exercice 2

Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Soient E un K-espace vectoriel, q une forme quadratique sur E et $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ une base de E orthogonale pour q.

1) Montrer que si e_i est isotrope, alors e_i appartient au noyau $N(q)$ de q.

2) Soit $J = \{j \in \{1, \ldots, n\} : e_i \text{ est isotrope}\}$. Montrer que $(e_j)_{j \in J}$ est une base de $N(q)$.

Exercice 3

Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des formes quadratiques sur K^n ?

Exercice 4

Notons Q l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathbf{R}^n$ et S la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$.

1) Montrer que l'application $N : q \to \sup\{|q(x)|; x \in S\}$ est une norme sur Q.

2) Démontrer que les formes quadratiques non dégénérées sur $\mathbf{R}^n$ forment un ouvert Q^* dense dans Q.

3) Démontrer que les formes quadratiques de signature $(p, n-p)$ forment un ouvert dans Q.

4) Quelles sont les composantes connexes de Q^* ?

Exercice 5

Soient E est un espace vectoriel réel de dimension finie et q est une forme quadratique non dégénérée sur E.

1) Notons (r, s) la signature de q. Quelles sont les signatures possibles des restrictions de q à des hyperplans de E ?

2) On se donne une suite $(E_k)_{0\leq k\leq n}$ de sous-espaces de E tels que $\dim(E_k) = k$ et $E_k \subset E_{k+1}$. On suppose que pour tout k la restriction q_k de q à E_k est non dégénérée.

a) Démontrer qu'il existe une base orthogonale $(e_1, \dots e_n)$ de E telle que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $E_k = Vect(e_1, \dots e_k)$.

b) Notons A_k la matrice de q_k dans une base de E_k. Démontrer que la signature de q est $(n-l, l)$ où l est le nombre de changements de signe dans la suite $\det(A_k)_{1\leq k\leq n}$ (Le signe de $\det(A_k)$ ne dépend pas de la base choisie).

Exercice 6

Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel. Quelle est en fonction de la signature de q la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel totalement isotrope ?

Exercice 7

Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Soient E un K-espace vectoriel et q une forme quadratique sur E.

1) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F + \dim(F \cap N(q)).$$

2) Plus généralement, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$\dim G - \dim(F^{\perp} \cap G) = \dim F - \dim(F \cap G^{\perp}).$$

3) Soit F un sous-espace vectoriel totalement isotrope maximal et $x \in F^{\perp}$ isotrope. Montrer que $x \in F$.

4) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels totalement isotrope maximaux. Montrer que $F^{\perp} \cap G = F \cap G^{\perp}$.

5) Montrer que tous les sous-espaces vectoriels totalement isotrope maximaux de E ont même dimension.