Université d'Orléans-Tours
Département de Mathématiques
M2MA

24 octobre 2017

Feuille d'exercices n^0 4

Exercice 1

On considère la forme quadratique de $\mathbf{R}^4$ donnée par

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \big(\sum_{i=1}^{4} x_i\big)^2$$

1) Donner la matrice de q dans la base canonique ainsi que la forme polaire φ_q associée à q.

2) Déduire de la question précédente le rang et la signature de q.

3) Donner une décomposition de Gauss de q et retrouver les résultats de la question précédente.

4) Déterminer l'orthogonal de $e_1 = (1, 1, 0, 0)$.

5) Déterminer l'indice de Witt $\nu(q)$ de q et donner deux sous-espaces totalement isotropes maximaux (setim) distincts.

Indication. *Pour la recherche de $\nu(q)$, on pourra considérer une forme quadratique équivalente à q.*

6) Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur a et b de sorte que la restriction de q au sous-espace :

$$V_{a,b} := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 + ax_3 + bx_4 = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

soit définie positive.

7) Trouver $(u, v, w, t) \in (\mathbf{Z}^*)^4$ tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ u & v & w & t \end{pmatrix}$$

appartienne à $O(q) \cap GL(4, \mathbf{Z})$.

8) En déduire une autre matrice de $O(q)$ de forme analogue, en observant la symétrie dans l'expression de la forme quadratique q.

9) Montrer qu'il existe une infinité d'éléments à coordonnées entières positives dans le cône isotrope de q.

10) Interpréter géométriquement le résultat de la question précédente.

Exercice 2

On rappelle une construction du corps à 9 éléments, à partir de $\mathbf{F}_3 = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} = \{0, 1, -1\}$. On note ω une solution de $X^2 + 1 = 0$ et on peut identifier $K = \mathbf{F}_9$ à

$$\{0, 1, -1, \pm\omega, \pm(\omega + 1), \pm(\omega - 1)\}$$

On pose $E = K^2$ et, pour $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ deux éléments de E,

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1^3 - x_2 y_2^3 + \omega x_1 y_2^3 + \alpha x_2 y_1^3$$

où $\alpha \in K$ est donné.

1) Montrer que φ est σ-sesquilinéaire pour un automorphisme σ à préciser et donner une condition sur α pour que φ soit hermitienne. Dans la question suivante, on supposera cette condition satisfaite.

2) Trouver une base orthonormale pour cette forme hermitienne après avoir justifié son existence.

Exercice 3

Soit $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n$ un polynôme unitaire de $\mathbf{R}[X]$ et E l'algèbre $\mathbf{R}[X]/P$. Par abus de notation, $Q, A, \ldots$ désigneront à la fois des éléments de $\mathbf{R}[X]$ et leur classe respective dans E.

1) Soit $A \in E$. Justifier brièvement que $M_A : E \to E$ tel que $M_A(Q) = AQ$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E et donner sa trace, que l'on notera (abusivement) trace (A).

2) Montrer que l'application $q : A \mapsto \text{trace}\,(A^2)$ est une forme quadratique sur E et donner sa matrice dans la base $(1, X, \ldots, X^{n-1})$.