Université d'Orléans-Tours
Département de Mathématiques
M2MA

28 novembre 2017

Feuille d'exercices n^0 5

Exercice 1

On considère la forme quadratique de $\mathbf{R}^2$

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2.$$

Calculer l'adjoint A^* relativement à la forme polaire de q de l'opérateur A donné par la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On considère la forme bilinéaire de $\mathbf{R}^{2n}$

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{n+i} + x_{n+i} y_i).$$

1) Montrer que f est non dégénérée et définit sur $\mathbf{R}^{2n}$ une structure d'espace hyperbolique.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le graphe $U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ d'une application linéaire $u \in L(\mathbf{R}^n)$ soit un sous-espace totalement isotrope de $(\mathbf{R}^{2n}, q)$.

Exercice 3

Sur l'espace vectoriel réel E des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[-1, 1]$ de $\mathbf{R}$, on considère le produit scalaire

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$

Soit E_n le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n. Soit $P_0, P_1, \ldots, P_n$ la base orthogonale de E_n obtenue à partir de $1, X, \ldots, X^n$ par l'orthogonalisation de Schmidt.

1) Calculer $P_0, P_1, \ldots, P_5$.

2) Montrer en utilisant une intégration par parties que P_n est un multiple scalaire du polynôme

$$\frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n].$$

Exercice 4

Montrer que la distance $d(x, F)$ d'un point x à un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien E est donné par la formule

$$d(x,F)^2 = \frac{\mathrm{vol}_{p+1}(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)}{\mathrm{vol}_p(e_1, e_2, \ldots, e_p)}$$

où $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base quelconque de F et vol_p est le volume euclidien en dimension p.

Exercice 5

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ un ensemble d'opérateurs symétriques d'un espace vectoriel euclidien E qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe un opérateur symétrique A de E tel que tous les A_i soient des polynômes de A.