Plan

Etats KMS et mesures quasi-invariantes

Jean Renault

Université d'Orléans

3 Octobre 2008

Mécanique statistique quantique élémentaire

L'algèbre des observables est $M_n(\mathbb{C})$. La dynamique est donnée par le groupe à un paramètre

$$\sigma_t(A) = e^{itH} A e^{-itH}$$

où $H \in M_n^{s.a.}(\mathbb{C})$ est l'hamiltonien. On définit l'entropie de l'état $\varphi = Tr(\ .\ \Phi)$ (où Φ est la matrice de densité) par
$S(\varphi) = -Tr(\Phi \log \Phi)$ et son énergie libre par
$F(\varphi) = S(\varphi) - \beta\varphi(H)$.
L'état d'équilibre du sytème est l'état qui, à β et H donnés, maximise l'énergie libre. Il est donné par la condition de Gibbs.

Etats de Gibbs

Proposition

Soient $H \in M_n^{s.a.}(\mathbb{C})$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$.

- $F(\varphi) \leq Tr(e^{-\beta H})$
- *on a l'égalité ssi* $\varphi = \dfrac{Tr(\ .\ e^{-\beta H})}{Tr(e^{-\beta H})}$.

Ce résultat justifie la définition suivante.

Definition

L'état $\varphi = \dfrac{Tr(\ .\ e^{-\beta H})}{Tr(e^{-\beta H})}$ est appelé l'état de Gibbs (pour l'hamiltonien H et à température inverse β).

Comment étendre cette définition au cas d'une C*-algèbre quelconque? La formule ci-dessus n'a pas nécessairement un sens. Par exemple, si on remplace l'algèbre $M_n(\mathbb{C})$ par l'algèbre $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension infinie, la formule n'aura un sens que si $e^{-\beta H}$ est un opérateur à trace, une condition restrictive qui n'est pas toujours vérifiée. La méthode la plus utilisée est un passage à la limite thermodynamique: on définit d'abord les états de Gibbs locaux, c'est-à-dire pour un système fini et on étudie leur limite quand le système devient infini. On va décrire une autre voie.

Etats KMS

Kubo, Martin et Schwinger ont découvert une relation directe entre l'état de Gibbs et le groupe à un paramètre σ_t.

Definition

Soit A une C*-algèbre, σ_t un groupe à un paramètre fortement continu d'automorphismes de A et $\beta \in \mathbb{R}$. On dit qu'un état φ de A est KMS$_\beta$ pour σ si pour tous $a, b \in A$, il existe une fonction F continue bornée sur la bande $0 \leq Imz \leq \beta$ et analytique sur $0 < Imz < \beta$ telle que:

- $F(t) = \varphi(a\sigma_t(b))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
- $F(t + i\beta) = \varphi(\sigma_t(b)a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On dit qu'un état φ est tracial si $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ pour tous $a, b \in A$. Les états KMS généralisent donc les états traciaux (qu'on obtient pour $\beta = 0$ ou pour σ trivial).

Dans la situation élémentaire précédente, les états de Gibbs et les états KMS coïncident:

Proposition

Soient $A = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et H un opérateur auto-adjoint tel que $e^{-\beta H}$ soit à trace. Alors l'état de Gibbs $\varphi = \dfrac{Tr(\,.\,e^{-\beta H})}{Tr(e^{-\beta H})}$ est l'unique état KMS_β pour la dynamique engendrée par H.

Propriétés des états KMS

Soient A une C*-algèbre séparable et $\sigma = (\sigma_t)$ un groupe à un paramètre fortement continu d'automorphismes de A.

- Les états KMS sont invariants par σ_t.
- Pour β donné, l'ensemble Σ_β des états KMS$_\beta$ est un simplexe de Choquet de A^*: c'est une partie convexe $*$-faiblement fermée de A^* et tout état KMS$_\beta$ est le barycentre d'une unique mesure de probabilité supportée sur les états KMS$_\beta$ extrémaux.
- Les états KMS$_\beta$ extrémaux sont factoriels.

Notre problème est de déterminer les états KMS$_\beta$ d'un système dynamique (A, σ) donné. Les discontinuités de $\beta \mapsto \Sigma_\beta$ sont interprétées comme des transitions de phase.

Definition

L'algèbre de Cuntz O_n, où $n \in \mathbb{N}$, est la C*-algèbre engendrée par n isométries $S_1, \ldots, S_n$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont les images forment une décomposition orthogonale de $\mathcal{H}$.

On a donc les relations dites de Cuntz $S_i^* S_j = \delta_{i,j} \mathrm{I}$ et $\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = \mathrm{I}$.

On dit "l'algèbre de Cuntz" car cette algèbre est unique à isomorphisme près.

Si $z = e^{it}$ est un nombre complexe de module 1, $zS_1, \dots, zS_n$ satisfont les relations de Cuntz et engendrent la même C*-algèbre O_n. Il existe un unique automorphisme σ_t de O_n tel que $\sigma_t(S_j) = e^{it}S_j$ pour tout $j = 1, \dots, n$. Cela définit un groupe à un paramètre fortement continu d'automorphismes de O_n

Definition

Ce groupe à un paramètre $\sigma = (\sigma_t)$ s'appelle le groupe de jauge de l'algèbre de Cuntz O_n.

Comme elle contient des isométries non unitaires, l'algèbre de Cuntz n'a pas d'état tracial. Elle possède cependant un état KMS pour le groupe de jauge.

Theorem (Olesen-Pedersen, Elliott, Evans)

Le groupe de jauge de l'algèbre de Cuntz O_n a un unique état KMS. Il apparaît à la température inverse $\beta = \log n$.

Démonstration. L'état φ est complètement déterminé sur les éléments de la forme $a = S_{i_1} \dots S_{i_k} S_{j_l}^* \dots S_{j_1}^*$. L'invariance par σ donne $\varphi(a) = 0$ si $k \neq l$. L'application itérée de la condition KMS donne

$$\varphi(a) = \delta_{i_1,j_1} \dots \delta_{i_k,j_k} e^{-k\beta}$$

La condition $\varphi(1) = 1$ et la deuxième relation de Cuntz donnent $1 = ne^{-\beta}$. S'il existe, ces relations déterminent l'état KMS. On vérifie que ces formules définissent bien un état.

Retour sur l'exemple élémentaire

L'algèbre est $M_n(\mathbb{C})$ et la dynamique est donnée par l'opérateur auto-adjoint H. On note $e_{i,j} = [\delta_{i,j}]$. On suppose que H est diagonal: $H = \sum h_i e_{i,i}$. L'état de Gibbs à la température inverse β est donné par

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}\rho_i$$

où les poids ρ_i sont complèment déterminés par la condition

$$\frac{\rho_i}{\rho_j} = e^{-\beta(h_i - h_j)}.$$

Cette condition admet une formulation qui aura un sens dans un cadre beaucoup plus général.

On introduit le cocycle

$$c(i,j) = h_i - h_j$$

sur $\{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ et la mesure μ sur $\{1,\dots,n\}$ donnée par les poids $\rho_1,\dots,\rho_n$.
La condition ci-dessus peut être écrite

$$\frac{d(r^*\mu)}{d(s^*\mu)} = e^{-\beta c}$$

où r, s sont respectivement les première et deuxième projections de $\{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,n\}$ et

$$r^*\mu(A) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j})\rho_i.$$

On dit que la mesure μ est quasi-invariante pour $G = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ et admet $e^{-\beta c}$ pour dérivée de Radon-Nikodým.

Groupoïdes

Definition

Un groupoïde est une petite catégorie $(G, G^{(0)})$ dont les flèches sont inversibles.

Les éléments de $G^{(0)}$ sont les objets ou unités, notés $x, y, \ldots$. Les éléments de G sont les flèches, notés $\gamma, \gamma', \ldots$. On a les applications but et source $r, s : G \to G^{(0)}$ et l'application $i : G^{(0)} \to G$ qui à l'objet x associe la flèche identité. On a l'application inverse $G \to G$ qui à la flèche γ associe la flèche inverse γ^{-1}. Enfin, on a la composition $G^{(2)} \to G$ qui à une paire de flèches composables (γ, γ') associe la composée $\gamma\gamma'$.

Example 1: groupes
C'est le cas où il y une seule unité: $G^{(0)} = \{e\}$.

Example 2: relations d'équivalence

Soit X un ensemble.

$$
\begin{array}{cc}
G & X \times X \\
G^{(0)} & X \\
i : G^{(0)} \to G & x \mapsto (x,x) \\
r : G \to G^{(0)} & r(x,y) = x \\
s : G \to G^{(0)} & s(x,y) = y \\
\text{inverse} & (x,y)^{-1} = (y,x) \\
G^{(2)} \to G & (x,y)(y,z) = (x,z)
\end{array}
$$

Pour $X = \{1, \dots, n\}$, c'est l'exemple élémentaire précédent.

Mesures quasi-invariantes

Definition

Soient G un groupoïde et A un groupe. Un cocycle sur G à valeurs dans A est morphisme de groupoïdes.

On suppose dorénavant que G est un groupoïde topologique localement compact et que les applications but et source sont des homéomorphismes locaux. Etant donnée une mesure μ sur $G^{(0)}$, on définit la mesure $r^*\mu$ (et de même la mesure $s^*\mu$) sur G par

$$\int f d(r^*\mu) = \int \sum_{r(\gamma)=x} f(\gamma) d\mu(x).$$

Proposition

Soit μ une mesure sur $G^{(0)}$ telle que $r^*\mu$ et $s^*\mu$ soient équivalentes. Alors $D_\mu = d(r^*\mu)/d(s^*\mu)$ est un cocycle à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Definition

On dit qu'une mesure μ sur $G^{(0)}$ est quasi-invariante si $r^*\mu$ et $s^*\mu$ sont équivalentes. Le cocycle D_μ s'appelle sa dérivée de Radon-Nikodým.

Soit D un cocycle à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On dira qu'une mesure μ est une D-mesure si elle est quasi-invariante et $D_\mu = D$. Les propriétés des D-mesures sont similaires aux propriétés des états KMS. Par exemple, si $G^{(0)}$ est compact, l'ensemble M_D des D-mesures de probabilité est un simplexe de Choquet dans le dual de $C(G^{(0)})$. Ses points extrémaux sont des mesures ergodiques.

Mesures de Gibbs

La définition des D-mesures que nous venons de donner est essentiellement la définition des mesures de Gibbs introduite par Capocaccia en 1976.

On retrouve aussi la définition des mesures de Gibbs à la Dobrushin-Lanford-Ruelle que voici.
On suppose que (A_n) est une suite décroissante de sous-C*-algèbres unifères d'une C*-algèbre commutative unifère $A = A_0$ et que $(E_n : A \to A_n)$ est une suite d'espérances conditionnelles d'indice fini compatibles.

La suite (A_n) définit une relation d'équivalence $R = \cup R_n$ sur $\hat{A}$ où

$$(x, y) \in R_n \Leftrightarrow x_{|A_n} = y_{|A_n}$$

La suite (E_n) définit un cocycle D sur R à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (et réciproquement): si $E_n(f)(x_n) = \sum_{\pi_n(x)=x_n} \rho_n(x) f(x)$, alors D est défini pour $(x, y) \in R_n$ par $D(x, y) = \rho_n(x)/\rho_n(y)$.

On dit qu'une mesure μ sur $\hat{A}$ admet les (E_n) comme espérances conditionnelles si elle se factorise à travers chaque E_n.

Proposition

Soient (A_n, E_n) et D comme plus haut. Les D-mesures sont exactement les mesures qui admettent les (E_n) comme espérances conditionnelles.

La C*-algèbre et le groupe d'automorphismes

Soit G un groupoïde G localement compact et étale. En imitant la construction de l'algèbre $M_n(\mathbb{C})$ à partir de la relation d'équivalence $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$, on construit une C*-algèbre $A = C^*(G)$. Ses éléments sont des fonctions sur G. Les formules définissant le produit et l'involution sont les mêmes que pour les matrices:

$$f * g(\gamma) = \sum_{\gamma'\gamma''=\gamma} f(\gamma')g(\gamma''); \qquad f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}.$$

Soit c un cocycle continu sur G à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il définit un groupe à un paramètre σ d'automorphismes de A par la formule

$$\sigma_t(f)(\gamma) = e^{itc(\gamma)} f(\gamma).$$

Une mesure de probabilité μ sur $G^{(0)}$ définit un état φ_μ sur A par la formule $\varphi_\mu(f) = \int f_{|G^{(0)}} d\mu$. Réciproquement, la restriction à $C_0(G^{(0)})$ d'un état φ de A est une mesure de probabilité μ sur $G^{(0)}$.

Théorème (R80, Kumjian-R06)

Soient G et c comme ci-dessus.

1. *Soit φ un état KMS_β pour σ. Alors, sa restriction à la sous-algèbre $C_0(G^{(0)})$ est une mesure quasi-invariante avec $D_\mu = e^{-\beta c}$.*
2. *Réciproquement, soit μ une mesure de probabilité sur $G^{(0)}$ quasi-invariante avec $D_\mu = e^{-\beta c}$. Alors l'état φ_μ est KMS_β pour σ.*
3. *Si $c^{-1}(0)$ est une relation d'équivalence, tous les états KMS pour σ sont de la forme φ_μ.*

Systèmes dynamiques expansifs

Soient X un espace compact, T un homéomorphisme local surjectif de X sur X et $\psi \in C(X, \mathbb{R}_+^*)$. On définit

- le groupoïde

$$G(X,T) = \{(x, m-n, y) : x, y \in X;\ m, n \in \mathbb{N} \text{ et } T^m x = T^n y\}$$

- le cocycle $D : G(X,T) \to \mathbb{R}_+^*$ par

$$D(x, m-n, y) = \frac{\psi(x)\psi(Tx)\dots\psi(T^{m-1}x)}{\psi(y)\psi(Ty)\dots\psi(T^{n-1}y)}$$

- l'opérateur de transfert $L_\psi : C(X) \to C(X)$ par

$$L_\psi f(x) = \sum_{Ty=x} \psi(y) f(y).$$

Proposition

Soit μ une mesure de probabilité sur X. Alors μ est quasi-invariante avec $D_\mu = D$ si et seulement si $L_\psi^* \mu = \mu$.

Dans ce contexte, une mesure vérifiant ces conditions équivalentes est appelée une g-mesure (ici $g = \psi$).

Théorème (Walters)

On suppose T positivement expansif et exact. Soit $\psi \in C(X, \mathbb{R}_+^*)$.

1. *L'équation $L_\psi^* \mu = \lambda\mu$ où μ est une mesure de probabilité admet une unique solution $\lambda > 0$;*
2. *le logarithme de λ est la pression du logarithme de ψ (notée $P(T, \log\psi)$);*
3. *si ψ satisfait la condition de Bowen, la mesure μ est unique.*

Corollaire (K-R06)

Soient T positivement expansif et exact et $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$. On pose $A = C^*(X, T)$ et σ comme plus haut. Alors

1. *Il existe un état KMS_β pour σ si et seulement si $P(T, -\beta\varphi) = 0$;*
2. *si φ a un signe constant et e^φ satisfait la condition de Bowen, il existe un et un seul état KMS pour σ.*

Example (le décalage de Bernoulli)

$$X = \{1, \ldots, n\}^{\mathbb{N}} \qquad T(x_0 x_1 \ldots) = x_1 x_2 \ldots$$

Alors, $C^*(X, T) = O_n$.
La fonction $\varphi \equiv 1$ définit le groupe de jauge σ. La condition 3 du corollaire est réalisée et on retrouve l'unicité de l'état KMS.
L'équation $P(T, -\beta\varphi) = 0$ devient $\beta = h(T) = \log n$.

Cet exemple admet de nombreuses généralisations. On peut par exemple considérer un potentiel de la forme $\varphi(x) = \lambda_{x_0}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$. L'équation $P(T, -\beta\varphi) = 0$ devient

$$\sum_{i=1}^{n} e^{-\beta\lambda_i} = 1$$

qui admet des solutions si et seulement si les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont de même signe. La solution est alors unique.
On peut aussi considérer les sous-décalages de type fini.

Le système de Bost-Connes

Bost-Connes ont introduit un C*-système dynamique (A, σ) issu de la théorie des nombres qui exhibe une transition de phase.
L'algèbre A provient de la paire de Hecke:

$$P_{\mathbb{Z}}^{+} := \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q}_{+}^{*} \end{pmatrix} := P_{\mathbb{Q}}^{+}$$

Le sous-groupe $P_{\mathbb{Z}}^{+}$ n'est pas normal mais presque normal: les classes doubles contiennent un nombre fini de classes à droite (et à gauche). La C*-algèbre A est la C*-complétion régulière de l'algèbre de Hecke, qui est une algèbre de convolution de fonctions sur les classes doubles. Le groupe d'automorphismes σ est lié au rapport du nombre de classes à droite et de classes à gauche dans une classe double.

Théorème (Bost-Connes, 95)

Soit (A, σ) le système de Bost-Connes.

1. *Pour tout $0 < \beta \leq 1$, il existe un et un seul état KMS$_\beta$. Il engendre le facteur injectif de type III$_1$. Il est invariant par l'action de Aut$(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.*
2. *Pour tout $1 < \beta \leq \infty$, les états KMS$_\beta$ extrémaux sont paramétrés par les plongements $\chi : \mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}} \to \mathbb{C}$. Ils engendrent le facteur I$_\infty$. Le groupe Aut$(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ agit librement et transitivement sur ces états KMS$_\beta$ extrémaux.*
3. *La fonction de partition de ce système est la fonction zeta de Riemann.*

Idée de la démonstration.

Ce système peut être étudié par la méthode précédente: il existe une "diagonalisation" du groupe d'automorphismes σ. Plus précisément, A contient la sous-algèbre de Cartan $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$. On peut écrire $A = C^*(G)$ où le groupoïde G est

$$G = \{(x, m/n, y) \in \mathcal{R} \times \mathbb{Q}^*_+ \times \mathcal{R} : mx = ny\}$$

où

- $m, n \in \mathbb{N}^*$;
- $\mathcal{R} = \prod \mathbb{Z}_p$;
- $\mathbb{Z}_p$ est l'anneau des entiers p-adiques;
- le produit est pris sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers;
- on voit $\mathbb{N}^*$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_p$, donc par le plongement diagonal comme un sous-ensemble de $\mathcal{R}$.

Comme dans l'exemple du groupe de jauge de l'algèbre de Cuntz, le groupe d'automorphismes σ est donné par le cocycle $c : G \to \mathbb{R}$ défini par

$$c(x, m/n, y) = \log(m/n)$$

Les hypothèses du théorème [KR] étant vérifiées, le problème se réduit à l'équation $D_\mu = e^{-\beta c}$.
Une étape intermédiaire est d'étudier le système

$$H = \{(x, m/n, y) \in \mathcal{N} \times \mathbb{Q}_+^* \times \mathcal{N} : mx = ny\}$$

où

- $m, n \in \mathbb{N}^*$;
- $\mathcal{N} = \prod_{\mathcal{P}} \overline{\mathbb{N}}$ est l'espace des entiers généralisés, donnés par $2^{n_2} 3^{n_3} \ldots$
- $\mathbb{N}^*$ est un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{N}}$, donc par le plongement diagonal comme un sous-ensemble de $\mathcal{N}$.