Master MEEF mathématiques
Année 2016-2017

Convexité.

---

(1) (a) Montrer que $f : I =]a, b[\to \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$,
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

(b) En déduire que f est convexe ssi pour tout $c \in]a, b[$, la fonction $\varphi_c :]a, b[\setminus\{c\} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_c(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ croît.

(c) En déduire que la courbe de f est toujours en-dessous de ses cordes.

(2) Soit $f : I =]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable.

(a) Montrer que f est convexe ssi f' est croissante.

(b) En déduire que si f est de plus deux fois dérivable, f est convexe ssi $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

(c) En déduire également que la courbe de f est toujours au-dessus de ses tangentes, à savoir pour tout (x, y), $f(x) \geq f(y) + (x - y)f'(y)$.

(3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

(a) Montrer que si f admet un minimum local, il s'agit d'un minimum global. Montrer que l'ensemble des points où est atteint ce minimum est un convexe.

(b) Montrer que si f est strictement convexe, alors f admet au plus un minimum.

(c) Montrer que si I est ouvert, f admet un minimum sur I en c ssi $f'(c) = 0$.

(4) Montrer que

(a) pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

(b) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

(c) pour $x > -1$, $\ln(1 + x) \leq x$.

(5) Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et a et b deux réels strictement positifs, montrer que $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

(6) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\frac{n}{1/x_1 + \cdots 1/x_n} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

(7) Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée est constante.

(8) Montrer que si g est convexe sur $\mathbb{R}$ et f est convexe et croissante sur $\mathbb{R}$, alors fog est convexe sur $\mathbb{R}$.

(9) Montrer qu'une fonction convexe sur I est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur x_0 de I et que $f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0)$. En déduire qu'elle est continue en tout point intérieur de I. Donner un contre-exemple de fonction convexe sur $[-1, 1]$, non continue.

(10) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexe. On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

(a) Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $\beta x \leq f(x) - f(0) \leq \alpha x$.

(b) Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que $|f(x) - f(0)| \leq \gamma |x|$. En déduire que f est continue en 0.

(c) Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$. [Pour $a \in \mathbb{R}$, considérer la fonction $g(x) = f(x+a)$.]