Master MEEF mathématiques
Année 2016-2017

Dérivation.

---

(1) Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que si f est dérivable en $a \in I$, alors f est continue en a. La réciproque est-elle vraie ?

(2) Soit $-\infty < a < b < \infty$, $x \in]a, b[$ et f, g deux fonctions de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables en x.

(a) Montrer que $f + g$ est dérivable en x et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

(b) Montrer que fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(c) On suppose que $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in]a, b[$. Montrer que f/g est dérivable en x et que $(f/g)'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

(d) Enoncé et démontrer le résultat sur la dérivation de la composée de deux fonctions.

(3) Soit f croissante sur I ouvert de $\mathbb{R}$ et dérivable sur I. Montrer que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Que peut-on dire si f est strictement croissante ?

(4) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un ouvert de $\mathbb{R}$, dérivable sur I et admettant un extremum local en $a \in I$. Montrer que $f'(a) = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

(5) Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}, \quad x \mapsto (x^2 - 1)\text{arcos}(x^2).$$

(6) Sur quelles parties de $\mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

$$x \mapsto x|x|, \quad x \mapsto \frac{x}{|x| + 1}.$$

(7) Etudier, selon les valeurs du paramètre $\alpha > 0$, la continuité et la dérivabilité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^\alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.

(8) (a) Etudier la continuité et la dérivabilité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \to \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(b) Que peut-on dire de la fonction $g : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $g(0) = 0$?

(9) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ f(2x - 1) & \text{si } x \in]1/2, 1] \end{cases}$$

A quelle condition la fonction g est-elle dérivable ?

(10) Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$x \to \frac{\text{arctan} x}{x^2 + 1}, \; x \to \frac{1}{(x + 1)^2}, \; x \to \frac{\sin x}{(\cos x + 2)^4},$$

$$x \to x^x, \; x \to (\text{ch} x)^x, \; x \to \ln(|x|), \; x \to \arctan(e^x).$$

(11) Calculer la dérivée n-ième de
$$x \mapsto \frac{1}{1-x^2}.$$

(12) Déterminer les applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

(13) Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Montrer que $|f| : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point où f ne s'annule pas et déterminer sa dérivée.

(14) Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.
On dit que θ est une approximation affine de f au voisinage de x_0 s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\theta(x) = f(x_0) + b(x - x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On dit que $\tilde{\theta}$ est une meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0 si $\tilde{\theta}$ est une approximation affine de f au voisinage de x_0 et si pour toute autre approximation affine θ on a :
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \tilde{\theta}(x)}{f(x) - \theta(x)} = 0$$

(a) Démontrer que si une meilleure approximation affine existe, alors elle est unique.

(b) Démontrer que f admet une meilleure approximation affine au voisinage de x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0. De plus, dans ce cas, la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0 est : $\tilde{\theta}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.