Master MEEF mathématiques
Année 2016-2017

Fonctions d'une variable réelle. Continuité.

---

(1) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a.

(2) Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f < g$. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $f + \lambda < g$.

(3) Soit f une fonction continue à valeurs positives sur un intervalle $[a, b]$ avec

$$\int_a^b f(t)dt = 0.$$

Montrer que f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

(4) Montrer qu'une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

(5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que f admet un minimum absolu.

(6) Rappeler et démontrer la caractérisation séquentielle de la continuité. Comment montrer qu'une fonction est non continue en un point ?

(7) Soit f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $|f|$ est continue sur I.
   (b) En déduire que $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont également continues sur I.

(8) Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de
   (a) la fonction f définie par $f(x) = x + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$,
   (b) la fonction g définie par $g(x) = \mathrm{E}(x) + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$.

(9) Montrer que l'application f définie par $f(x) = x^2 \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$ prend toutes les valeurs entières.

(10) Soit $I = [a, b]$ et f une application continue de I dans I.
   (a) Montrer que f admet un point fixe.
   (b) Quelle hypothèse supplémentaire peut-on ajouter sur f pour avoir l'unicité du point fixe sur $[a, b]$?

(11) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f(x) = \frac{1}{q}$ si x est rationnel et $x = \frac{p}{q}$ est la (?) fraction rationnelle irréductible représentant x.
   (a) On pose, pour tout $\varepsilon > 0$, $\Omega_\varepsilon = \{x \in [0, 1]; f(x) \geq \varepsilon\}$. Montrer que Ω_ε est fini.
   (b) En déduire que f est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel.

(12) Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Montrer que f est linéaire.

(13) On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.
Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est 1- lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

(14) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k- lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$ telle que $f(0) = 0$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite réelle déterminée par $u_0 = a$ et , $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que (u_n) tend vers 0.

(15) (a) Rappeler la définition de la continuité uniforme.
(b) Ecrire avec des quantificateurs : f n'est pas uniformément continue sur I.
(c) Montrer qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue.
(d) Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(16) (a) [Epreuve 1 - 2012] Montrer que pour tous réels x et y, on a :
$$||y| - |x|| \leq |y - x|.$$
(b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(17) [Epreuve 1 - 2012]
(a) Montrer que pour tous réels x et y positifs, on a :
$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \text{ et } \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}.$$
(b) Montrer que $g : x \to \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$, mais n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

(18) Etudier la parité de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$