Master MEEF mathématiques
Année 2016-2017

Fonctions réciproques.

---

(1) On suppose que f est continue sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$.
  (a) Démontrer que f est strictement monotone sur I si et seulement si f est bijective de I sur $J = f(I)$.
  (b) Ce résultat est il vrai si f n'est pas continue ?
  (c) Montrer que la réciproque $f^{-1} : J \to I$ est elle-même strictement monotone et continue.

(2) Soit $f : I \to f(I) = J$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction continue et strictement monotone. Montrer que si f est dérivable en $x \in I$ avec $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y = f(x)$ et on a $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. En déduire que si f est dérivable et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' o f^{-1}}$.

(3) Si $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ est une bijection, montrer que les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

(4) (a) Montrer que la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ admet une fonction réciproque notée arctan.
  (b) Montrer que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée notée arctan'.
  (c) Etablir, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, l'encadrement $0 \leq \arctan x \leq x$.

(5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
  (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$.
  (b) Déterminer pour $y \in]-1, 1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ analogue de celle de $f(x)$.

(6) Soit $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \sqrt{\sin x} + x.$$
Justifier que f réalise une bijection vers un intervalle à préciser et que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

(7) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + e^x$.
  (a) Montrer que f est strictement croissante, continue et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g l'application réciproque de f.
  (b) Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(1)$ et $g''(1)$.

(8) On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \sin x$.
  (a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante. On note, dans la suite, g sa fonction réciproque.
  (b) Montrer que f et g sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$.
  (c) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de g.

(9) On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$.
  (a) Montrer que la fonction admet une fonction réciproque, notée f^{-1} dont on donnera l'intervalle de définition et les propriétés immédiates.
  (b) La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Que peut on en déduire pour f^{-1} ?
  (c) Calculer f^{-1}. Qu'en concluez-vous ?

(10) On définit f sur $I =]0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \frac{1}{x \sin x}$.
  (a) Montrer que f est continue sur I puis qu'elle établit une bijection de I sur l'intervalle $J = [\frac{2}{\pi}, +\infty[$.
  (b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer sa dérivée au point $\frac{2}{\pi}$.