Master MEEF mathématiques
Année 2016-2017

Limites.

---

(1) Démontrer, comme vous le feriez devant une classe de terminale, que $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, et que $\lim_{x\to 1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty$.

(2) Démontrer, après l'avoir énoncé, le théorème de composition comme vous le feriez devant une classe de terminale.

(3) Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x};\quad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x};\quad c)\ \lim_{x\to 0^+} x^x;$$

$$d)\ \lim_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x));\quad e)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x};\quad f)\ \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\arccos x}.$$

(4) Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$a)\ \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x};\quad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos e^x}{x^2+1};\quad c)\ \lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x};\quad d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\arctan x}{x}.$$

(5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique (avec $T > 0$) telle que f admette une limite réelle à l'infini. Montrer que f est constante.

(6) Démontrer que, dans la définition de la limite égale à ℓ, tout intervalle contenant ℓ peut être remplacé par tout intervalle centré en ℓ.

(7) Enoncer et démontrer un théorème sur le calcul de la limite d'un polynôme en l'infini.

(8) Enoncer et démontrer un théorème sur le calcul de la limite d'une fraction rationnelle en l'infini.

(9) Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormal direct d'origine 0, $\mathcal{C}$ désigne le cercle trigonométrique de centre 0 et d'origine I. M désigne le point d'abscisse curviligne r où r est un réel appartenant à l'intervalle $]0,3[$. T est le point d'intersection de la demi-droite $[0M)$ avec la tangente à $\mathcal{C}$ issue du point I. On considère alors les trois domaines suivants : le triangle OIM, le triangle OIT et la portion de disque délimité par l'arc de cercle IM.

   (a) En comparant les aires de trois domaines plans, démontrer que
   $$\sin x \leq x \leq \tan x$$

   (b) En déduire la limite de
   $$\frac{\sin x}{x}$$
   lorsque x tend vers 0.

   (c) Interpréter cette limite en terme de nombre dérivée.

   (d) En utilisant, après l'avoir justifié, que
   $$\frac{\cos(x)-1}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+1}$$
   déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{\cos(x)-1}{x}$.

   (e) Déterminer la dérivée de la fonction sin.

   (f) Déterminer la dérivée de la fonction cos.

(10) Soit f la fonction définie par
$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}.$$
Étudier f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal en précisant l'allure des branches infinies.

(11) Étudier la fonction f donnée par $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$. Étudier les branches infinies de sa courbe représentative Γ dans un repère orthonormé et la tracer. Montrer que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de Γ.