Master MEEF mathématiques
Année 2016-2017

Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis.

---

(1) Enoncer et démontrer le théorème de Rolle.

(2) Enoncer le théorème des accroissement finis et le démontrer à partir du théorème de Rolle. En déduire l'inégalité des accroissements finis.

(3) Démontrer les inégalités suivantes :
   (a) pour tout x, $y \in \mathbb{R}$, $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.
   (b) pour tout $x > 0$, $1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x$.
   (c) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
   (d) pour tout $x > 0$, $\frac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x$.
   (e) pour tout $x > 0$, $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.
   (f) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2\sqrt{(n+1)^3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n^3}}$.

(4) (a) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Démontrer que si $f' = 0$ sur $]a, b[$ alors f est constante sur $[a, b]$.
   (b) Application. Vérifier que :
      (i) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
      (ii) $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

(5) Soit f dérivable sur I ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que f est croissante sur I ssi $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Que peut-on dire si f est strictement croissante ?

(6) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est lipschitzienne.

(7) (a) Soient a et b des réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b]$. On suppose que f' admet une limite ℓ à droite de a. Montrer que f est dérivable à droite au point a et que $f'(a) = \ell$.
   (b) Application : montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(8) On pose $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ pour x réel non nul et $f(0) = 0$.
   (a) Montrer l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'un polynôme P_n tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = x^{-3n} P_n(x) f(x).$$
   Quel est le degré de P_n ?
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, toutes ses dérivées étant nulles en 0.
   (c) La fonction f admet-elle un DL en 0 ? Un développement en série entière ?

(9) [Epreuve EP1 - 2016] Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}([a, b])$ telle que $f^{(n-1)}$ soit dérivable sur $]a, b[$. On suppose que f s'annule $n + 1$ fois sur $[a, b]$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

(10) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas. Montrer que f ne peut pas être périodique.

(11) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Montrer qu'il existe c tel que $f'(c) = 0$.

(12) (a) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable et vérifiant $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. Montrer que la dérivée de f s'annule.

(b) Cet énoncé se généralise (théorème de Darboux) : soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable et λ tel que $f'(a) < \lambda < f'(b)$ (en supposant $f'(a) < f'(b)$), alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \lambda$. Que pensez vous de cet énoncé ?

(13) A l'aide du théorème des accroissements finis,

(a) déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} \left((x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \right);$$

(b) montrer que

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim_{n \to +\infty} -\frac{\ln n}{n^2}.$$

(14) On considère la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n^2}$. Montrer que cette suite converge.

(15) Soit f dérivable sur $[a, b]$ satisfaisant $f'(a) = 0$ et $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

(16) Soit une fonction f continue sur $[a, b]$ avec $f(a) = f(b) = 0$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose, en outre, que la dérivée est strictement décroissante.

(a) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(b) Montrer que pour tout $t \in]a, c[$, on a $f'(t) > 0$ et que pour tout $t \in]c, b[$ on a $f'(t) < 0$.

(c) En déduire que c est un maximum global de la fonction sur $[a, b]$ et que $f \geq 0$ sur $[a, b]$.

(17) [Epreuve EP1 - 2016] Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f une fonction dans $\mathcal{C}^n([a, b])$ et $a_1 < \cdots < a_n$ des nombres réels appartenant à $[a, b]$. On note P le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \cdots, a_n$ (on rappelle que P existe et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$). On fixe $c \in [a, b]$, distinct de $a_1, \cdots, a_n$. On définit la fonction g_c sur $[a, b]$ par

$$g_c(x) = f(x) - P(x) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k}.$$

(a) Montrer que g_c s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$.

(b) Montrer que g_c est n fois dérivable sur $[a, b]$ puis que $g_c^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.

(c) On définit la fonction h_c sur $[a, b]$ par $h_c(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{x-a_k}{c-a_k}$. En remarquant que h_c est une fonction polynôme de degré n, donner une expression de $h_c^{(n)}$, puis de $g_c^{(n)}$.

(d) Déduire des questions précédentes qu'il existe un réel $\zeta \in [a, b]$ tel que

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (c - a_k).$$

(e) Montrer que le résultat établi dans la question précédente reste vrai si c est égal à l'un des a_k.

(f) En déduire que

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{n!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \max_{x\in[a,b]} \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|$$

(18) Soient f et g deux fonctions définies, continues et dérivables sur un intervalle I et a un élément de I.

(a) Montrer que, pour tout $\alpha \in I$, il existe $c \in]a, \alpha[$ (ou $]\alpha, a[$) tel que

$$(f(\alpha) - f(a))g'(c) = (g(\alpha) - g(a))f'(c).$$

(b) En déduire la *régle de l'Hospital* :

Si $\dfrac{f'}{g'}$ admet une limite ℓ au point a alors il en est de même de la fonction

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

(c) Application : Calculer $\lim_{x\to 1^-} \frac{\text{Arccos}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(19) Soit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable pour tout $x \in]a, b[$. Soit $x_0 \in]a, b[$.

(a) Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2}A$.

(b) On définit φ sur $[a, b]$ par : $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) - \frac{(x-a)(x-b)}{2}A$. Montrer qu'il existe $c \in]a, x_0[$ et $d \in]x_0, b[$ tels que $\varphi'(c) = \varphi'(d) = 0$.

(c) Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2}f''(\theta)$.