

Feuille de TD n°1 : Intégration numérique

Exercice 1 : Application de la méthode des trapèzes

Estimer $\int_0^{5/2} f(t)dt$ à partir des données suivantes :

x	0	1/2	1	3/2	2	5/2
$f(x)$	3/2	2	2	1.6364	1.2500	0.9564

en utilisant la méthode des trapèzes composée.

Exercice 2 : Ordre d'une formule d'intégration

Quel est l'ordre de la formule $\tilde{I}(f) = \frac{4}{3}f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)$ qui approche $\int_{-1}^1 f(t)dt$?

Exercice 3 : Méthodes de Newton-Cotes : poids, ordre et formules d'erreur

On considère les formules obtenues à l'aide des polynômes d'interpolation pour des points également répartis sur $[-1, 1]$, c'est-à-dire

$$x_i = -1 + i\frac{2}{n} \text{ pour } 0 \leq i \leq n.$$

Ce sont les *méthodes de Newton-Cotes*.

3.1. Montrer qu'il existe des poids λ_i , $0 \leq i \leq n$ uniques tels que la méthode de Newton-Cotes à $n+1$ points soit d'ordre n .

3.2. Calculer les poids de la méthode de Simpson, qui est la méthode de Newton-Cotes pour $n=2$ sur $[-1, 1]$.

3.3. Montrer les formules de symétrie suivantes : $x_{n-i} = -x_i$, $L_{n-i}(x) = L_i(-x)$ et $\lambda_{n-i} = \lambda_i$, pour tout $0 \leq i \leq n$.

3.4. En déduire que si n est pair, la méthode de Newton-Cotes à $n+1$ points est d'ordre $n+1$.

3.5. Calculer les noyaux de Péano sur $[-1, 1]$ pour la méthode du point milieu et la méthode des trapèzes ($n=1$) et vérifier qu'ils sont de signe constant sur $[-1, 1]$. Montrer que

(a) $|E(f)| \leq \frac{1}{3} \|f''\|_\infty$, pour la méthode du point milieu,

(b) $|E(f)| \leq \frac{2}{3} \|f''\|_\infty$, pour la méthode des trapèzes ($n=1$).

2.6. En déduire les formules d'erreur pour les méthodes composées correspondantes.

Exercice 4 : Ordre et erreur d'une formule d'intégration

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$. On considère la formule de quadrature élémentaire pour approcher $\int_0^1 f(t)dt$: $\tilde{I}(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(\xi) + \lambda_2 f'(0)$, où $\xi \in]0, 1[$ et $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ sont des réels.

On pose $E(f) = \int_0^1 f(t)dt - (\lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(\xi) + \lambda_2 f'(0))$.

4.1. Déterminer les paramètres $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ et ξ pour que la formule de quadrature soit exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

4.2. Les paramètres $\xi, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ ainsi déterminés, calculer $E(x \rightarrow x^4)$ et en déduire l'ordre de la méthode. Déterminer le noyau de Péano K associé à la méthode.

4.3. Vérifier avec scilab que K est toujours positif. En déduire une expression de l'erreur $E(f)$ lorsque $f \in \mathcal{C}^4([0, 1])$.

4.4. A l'aide d'un changement de variable, construire une méthode de quadrature élémentaire sur un intervalle $[a, b]$ et donner la valeur de l'erreur pour la formule composée.

Exercice 5 : Calcul de méthodes de Gauss

5.1. Calculer les méthodes de Gauss associées au poids $\omega = 1$ sur $[-1, 1]$ dans le cas de 1, 2, puis 3 points.

5.2. Calculer les méthodes de Gauss associées au poids $\omega = \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$ dans le cas de 1 point.

Exercice 6 : Méthodes de Gauss "fermées"

On reprend les méthodes de Gauss sur $[-1, 1]$ en imposant les points extrêmes de l'intervalle comme points de la formule de quadrature, à savoir $x_0 = -1$ et $x_n = 1$. Ces méthodes sont appelées *méthodes de Gauss-Lobatto-Legendre*.

6.1. La méthode à $n + 1$ points est d'ordre $2n - 1$. Pourquoi ?

6.2. Calculer les méthodes obtenues pour le poids $\omega = 1$ sur $[-1, 1]$ dans le cas de 2 ($n = 1$), puis 3 ($n = 2$) et 4 ($n = 3$) points.

Exercice 7 : Calcul d'intégrale généralisée

Estimer $\int_A^{+\infty} \cos t e^{-t} dt$ en fonction de $A \geq 1$. En déduire un programme qui permet de calculer $\int_0^{+\infty} \cos t e^{-t} dt$ avec une précision ε fixée.

On pourra utiliser la méthode de Simpson dont une estimation de l'erreur de la formule composée pour calculer $\int_a^b f(t)dt$ est donnée par $|E_{Simpson}(f)| \leq \frac{h^4}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty}(b-a)$.

Exercice 8 : Calcul d'intégrale généralisée

8.1. Montrer que la formule de Gauss à 1 point associée au poids $\omega(x) = x^{-\beta}$ pour $0 < \beta < 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$ vaut $\int_0^1 f(t)t^{-\beta}dt \simeq \frac{1}{1-\beta}f\left(\frac{1-\beta}{2-\beta}\right)$.

8.2. En déduire une approximation de l'intégrale $\int_0^{\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$ en utilisant la méthode du point milieu, puis la méthode de Gauss calculée ci-dessus. Quelle est la valeur exacte de cette intégrale ?