

Feuille de TD n°2 : Méthodes numériques pour les équations différentielles (ordinaires)

Exercice 1 : Application de la méthode d'Euler explicite

L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle $y'(t) = -\frac{1}{1+t^2}y(t)$.

Sachant qu'à l'instant $t = 0$ la concentration est $y(0) = 5$, déterminer la concentration à $t = 2$ à l'aide de la méthode d'Euler explicite avec un pas $h = 0.5$.

Exercice 2 : Equations d'ordre 2 et 3

Reformuler les équations suivantes en systèmes du premier ordre :

2.1. l'équation du pendule amorti $y'' + \alpha y' + \sin y = 0$,

2.2. $y''' + y'' + y' + y = \cos t$.

Exercice 3 (*) : Stabilité, consistance et ordre

On suppose que la fonction $(t, y) \rightarrow f(t, y)$ est lipschitzienne par rapport à la variable y .

Pour les deux méthodes suivantes, vérifier la stabilité, la consistance et calculer l'ordre (dans le cas où f est indépendant de t) :

Méthode d'Euler modifiée (point milieu) : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n))$.

Méthode de Heun : $p_{n,1} = f(t_n, y_n)$, $p_{n,2} = f(t_n + h, y_n + hp_{n,1})$,
 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(p_{n,1} + p_{n,2})$.

Exercice 4 (*) : Méthodes de Runge - Kutta

4.1. Quelles sont les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 du type $\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1 - \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array}$? Y a-t-il d'autres méthodes de Runge-Kutta explicites à 2 étages et d'ordre 2 ?

4.2. On considère les méthodes de Runge-Kutta du type $\begin{array}{c|ccc} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & \alpha & \beta & \gamma \end{array}$

4.2.a. Pour quelles valeurs de (α, β, γ) reconnait-on la méthode d'Euler, d'Euler modifiée, de Heun ?

4.2.b. Pour quelles valeurs de (α, β, γ) , la méthode est-elle stable ?

4.2.c. Quelles relations doivent satisfaire (α, β, γ) pour que la méthode soit consistante ? convergente ? d'ordre ≥ 1 ? d'ordre ≥ 2 ?

Exercice 5 : Méthodes implicites

On considère l'équation $y' = \lambda y$ avec $y(0) = 1$.

5.1. Montrer la stabilité, la consistance et calculer l'ordre des méthodes d'Euler implicite et de Crank-Nicolson pour cette équation particulière.

5.2. Dans le cas $\lambda < 0$, déterminer à quelle condition ces deux méthodes, la méthode d'Euler modifiée et la méthode de Heun sont A-stables (c'est-à-dire $y_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$).

Exercice 6 : Problème raide

On considère l'équation $\begin{cases} y' = -150y + 30, \\ y(0) = \frac{1}{5}, \end{cases}$ pour $t \in [0, 1]$, dont la solution exacte est $y(t) = \frac{1}{5}$.

Avec une donnée initiale $y(0) = \frac{1}{5} + \varepsilon$, la solution exacte devient $y(t) = \frac{1}{5} + \varepsilon e^{-150t}$.

6.1. Calculer les itérations obtenues par le schéma d'Euler explicite, en cherchant une relation de récurrence pour $y_n - \frac{1}{5}$.

6.2. En déduire une contrainte sur le pas de temps pour que les itérations du schéma d'Euler explicite tendent vers $\frac{1}{5}$ quand n tend vers $+\infty$.

6.3. Mêmes questions pour les méthodes d'Euler implicite et de Crank-Nicolson.

6.4. Qu'en est-il pour le schéma d'Euler modifié ?

Exercice 7 (*) : Méthodes symplectiques

Le but de l'exercice est de résoudre numériquement le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}, \forall t \in [0, T],$$

avec comme conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$. En posant $z = x + iy$, ce système devient dans le plan complexe :

$$z'(t) = iz(t)$$

et a pour solution exacte

$$z(t) = e^{it}, \forall t \in [0, T].$$

On a donc pour tout $t \in [0, T]$, $|z(t)|^2 = 1$.

Soit un pas de temps $0 < h \leq 1$ et les points de discrétisation $t_n = nh$, $0 \leq n \leq N$, tels que $t_N = hN = T$. On cherche $z_n \in \mathbb{C}$, une approximation de $z(t_n)$, avec $z_0 = 1$.

7.1. Calculer z_n défini par la méthode d'Euler Explicite. Quelle est le module de z_n ?

7.2. Faire de même pour Euler Implicite et pour Crank-Nicolson. Qu'en déduisez vous ?