Modélisation et Calcul Scientifique 2 - MT 01
M1 SPMA/TI

Feuille de TD n°4 : Equations différentielles. Problèmes aux limites

---

Exercice 1 : Problèmes aux limites

Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires ou non linéaires, et si elles sont avec condition initiale ou avec condition aux bords :
1. $y'' + 4y' + 3y^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$,
2. $y'' + 2yy' = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$,
3. $y'' - y' + \cos y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(1) = 2$,
4. $y'' + ty' + y = te^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Exercice 2 : Méthode des différences finies - Différentes conditions aux bords

On considère le problème vu en cours avec les conditions aux bords suivantes :

(1) Conditions aux bords de Dirichlet non homogènes :

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \quad u(0) = a, u(1) = b,$$

(2) Conditions aux bords mixtes :

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \quad u(0) = 0, u'(1) = 0,$$

Dans chacun de ces deux cas :
1. Donner une solution exacte du problème considéré.
2. Ecrire le schéma aux différences finies pour approcher la solution de cette équation, en prenant en compte les conditions aux bords ci-dessus.
3. La matrice du système linéaire obtenu est-elle inversible ?

Exercice 3 : Méthode des différences finies

On considère la généralisation suivante du problème vu en cours avec $c(x) > 0$:

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \quad u(0) = 0, u(1) = 0.$$

1. Ecrire le schéma aux différences finies pour approcher la solution de cette équation.
2. La matrice du système linéaire obtenu est-elle inversible ?
3. Reprendre les preuves de la consistance, la stabilité, la convergence et l'ordre du schéma.

Exercice 4 : Méthode des différences finies - Conditions de Neumann homogènes

On considère le problème suivant :

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \quad u'(0) = 0, u'(1) = 0.$$

1. Montrer que si ce problème admet une solution, alors $\int_0^1 f(t)dt = 0$. On suppose que cette condition est satisfaite, montrer que l'équation admet une solution à une constante près.
2. Ecrire le schéma aux différences finies pour approcher la solution de cette équation, en prenant en compte les conditions aux bords ci-dessus.
3. La matrice du système linéaire obtenu est-elle inversible ? Donner un élément de son noyau.

Exercice 5 : Méthode des différences finies à 5 points

Montrer que la méthode des différences finies à 5 points définie par

$$\frac{-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2}}{12h^2}$$

est d'ordre 4 pour approcher u''.

Exercice 6 : Equation de la chaleur : introduction aux EDP

On cherche à trouver une valeur approchée de la fonction $u(t,x)$ avec $t > 0$ et $x \in [0,1]$ vérifiant l'équation de la chaleur suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

On considère en espace les conditions aux bords

$$u(t, x = 0) = a,\ u(t, x = 1) = b, \quad \text{pour tout } t > 0$$

et en temps la condition initiale

$$u(t = 0, x) = u_0(x), \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

En temps, on considère le pas de temps $\Delta t > 0$ et les temps discrets $t_n = n\Delta t, n \in \mathbb{N}$. En espace, on considère le pas d'espace $\Delta x > 0$ et les points discrets $x_i = i\Delta x, i \in \{0, \cdots, M+1\}$ tels que $x_0 = 0$ et $x_{M+1} = 1$. On note u_i^n une approximation de la valeur $u(t_n, x_i)$ de la fonction u évaluée au temps t_n et au point x_i et on appelle U^n le vecteur de taille M dont la i-ème composante est $u_i^n, 1 \leq i \leq M$.

On utilise la méthode des différences finies pour discrétiser la dérivée en espace.

1. Utiliser la méthode d'Euler explicite pour la dérivée en temps et écrire le schéma ainsi obtenu pour calculer le vecteur U^n.

2. Comment calculer concrètement le vecteur U^n ?

3. Utiliser la méthode d'Euler implicite pour la dérivée en temps et écrire le schéma ainsi obtenu pour calculer le vecteur U^n.

4. Comment calculer concrètement le vecteur U^n ? La matrice du système linéiare ainsi obtenu est-elle inversible ?

5. Estimer l'erreur de consistance de ces deux schémas. Quels sont leurs ordres en temps et en espace ?