Modélisation et Calcul Scientifique 2 - MT 01
M1 SPMA/TI

Feuille de TP n°1 : Intégration numérique

Exercice 1 : Application des méthodes de Newton-Cotes

1.1. Programmer les méthodes **composées** des rectangles à gauche, du point milieu, des trapèzes et de Simpson sur n intervalles de même longueur h.

Rappel : la formule de Simpson sur $[a,b]$ *s'écrit* $\widetilde{I}(f) = \dfrac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$.

1.2. Vérifier graphiquement que les erreurs de ces méthodes sont proportionnelles respectivement à h, h^2, h^2, h^4. On pourra utiliser comme test $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

1.3. Que se passe-t-il pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\,dt$? Pourquoi ?

Exercice 2 : Application des méthodes de Gauss

2.1. Programmer les méthodes de Gauss-Legendre **élémentaires** suivantes ($\omega = 1$ sur $[-1,1]$) :

- $l = 1$, $x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = 1$;
- $l = 2$, $x_0 = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ et $\lambda_0 = \dfrac{5}{9},\ \lambda_1 = \dfrac{8}{9}$, $\lambda_2 = \dfrac{5}{9}$.

Appliquer ces méthodes au calcul des intégrales $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\,dt$. Comparer avec les méthodes de Newton-Cotes **élémentaires** avec le même nombre de points.

2.2. Programmer les méthodes de Gauss-Tchebychev ($\omega = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$) **élémentaires** : quel que soit l, $x_i = \cos\left(\dfrac{2i+1}{2l+2}\pi\right)$ et $\lambda_i = \dfrac{\pi}{l+1}$, $0 \le i \le l$.

Appliquer ces méthodes au calcul de $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt$, puis de $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Conclure.

Exercice 3 : Calculs d'intégrales généralisées (1)

Estimer $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,dt$ en fonction de $A \ge 1$. En déduire un programme qui permet de calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,dt$ avec une précision ε fixée avec une méthode **composée**.

Exercice 4 : Calculs d'intégrales généralisées (2)

Montrer que la formule de Gauss pour $l = 0$ associée au poids $\omega(x) = x^{-\beta}$ pour $0 < \beta < 1$ sur l'intervalle $[0,1]$ vaut $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^{-\beta}dt \simeq \frac{1}{1-\beta} f\left(\frac{1-\beta}{2-\beta}\right)$.

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{10^{-2}} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$ en utilisant la méthode du point milieu **élémentaire**, puis la méthode de Gauss **élémentaire** calculée ci-dessus. Comparer.