Modélisation et Calcul Scientifique 2 - MT 01
M1 SPMA/TI

Feuille de TP n°2 : Méthodes numériques pour les équations différentielles (ordinaires)

Exercice 1 : Ordre des méthodes classiques explicites pour une équation

1.1. Programmer les méthodes d'Euler explicite, d'Euler modifiée (Runge-Kutta 2) et de Runge-Kutta 4 pour l'équation différentielle $y'(t) = -y(t)$ jusqu'au temps $T = 1$ avec comme condition initiale $y(0) = 1$.

1.2. Faire varier le pas de temps h et tracer l'erreur entre solution exacte et solution approchée en fonction de h. En déduire graphiquement l'ordre des quatre méthodes étudiées.

Exercice 2 : Résolution numérique d'un système d'équations différentielles ordinaires

On considère le système $\begin{cases} y_1' = & y_1, \\ y_2' = & 2y_1 - y_2 \end{cases}$ avec $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 1$, dont la solution exacte est $(y_1(t), y_2(t)) = (2e^t, 2e^t - e^{-t})$.

Ecrire les schémas d'Euler explicite et d'Euler modifié pour ce système et comparer les solutions approchées ainsi calculées avec la solution exacte. On sortira deux types de graphique :

— Graphique 1 : y_1 et y_2 en fonction de t,
— Graphique 2 : y_2 en fonction de y_1.

Exercice 3 : Méthodes implicites

3.1. Reprendre l'exercice 1 avec les méthodes d'Euler implicite et de Crank-Nicolson.

3.2. Reprendre l'exercice 2 avec les méthodes d'Euler implicite et de Crank-Nicolson.

Exercice 4 : Problèmes raides et méthodes implicites

4.1. On considère l'équation $\begin{cases} y' = -150y + 30, \quad t \in [0,1], \\ y(0) = \dfrac{1}{5}, \end{cases}$ dont la solution exacte est $y(t) = \dfrac{1}{5}$.

Avec une donnée initiale $y(0) = \dfrac{1}{5} + \varepsilon$, la solution exacte devient $y(t) = \dfrac{1}{5} + \varepsilon e^{-150t}$.

Tester ce problème avec la méthode d'Euler explicite et les paramètres $h = \dfrac{1}{50}$, $\varepsilon = 10^{-10}$ et $T = 1$.

4.2. Que se passe-t-il pour la méthode d'Euler implicite et les mêmes paramètres ? Que se passe-t-il pour la méthode d'Euler explicite et $h = \dfrac{1}{100}$?

4.3. Qu'en est il pour les méthodes de Crank-Nicolson et d'Euler modifiée ? Est ce qu'une méthode d'ordre élévée résout le problème ?

4.4. On considère le système $\begin{cases} x' = & -k_1 x + k_3 yz \\ y' = & k_1 x - k_3 yz - k_2 y^2 \\ z' = & k_2 y^2 \end{cases}$ avec $k_1 = 0.04$, $k_2 = 3.10^7$, $k_3 = 10^4$ $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$. On peut montrer que x, y et z sont des fonctions positives, que x décroît vers 0, que z croît vers 1 et que y croît puis décroît vers 0.

Le tester jusqu'à $T = 0.3$ avec la méthode d'Euler explicite et $h = 10^{-3}$, $h = 10^{-4}$.

Exercice 5 : Méthodes symplectiques

Le but de l'exercice est de résoudre numériquement le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}, \forall t \in [0,T],$$

avec comme conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$. On a pour tout $t \in [0,T], |x(t)|^2 + |y(t)|^2 = 1$.

Soit un pas de temps $0 < h \leq 1$ et les points de discrétisation $t_n = nh$, $0 \leq n \leq N$, tels que $t_N = hN = T$.

5.1. Calculer (x_n, y_n) défini par la méthode d'Euler Explicite et tracer les itérations y_n en fonction de x_n.

5.2. Faire de même pour les méthodes d'Euler Implicite, Euler modifiée et pour Crank-Nicolson. Qu'en déduisez vous ?