Master MEEF mathématiques
Année 2016-2017

Théorème des valeurs intermédiaires

---

(1) Rappeler l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

(2) Preuve du théorème des valeurs intermédiaires [Epreuve 1 - 2011] :

Soit f continue sur I. Soit $(a,b) \in I^2$ tels que $a < b$, on suppose que $f(a) < f(b)$ (que se passe-t-il si $f(a) = f(b)$?). Soit λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout entier n :
si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda$ alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$;
si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq \lambda$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

(a) Justifier que pour tout entier n, $a_n \in [a,b]$ et $b_n \in [a,b]$.

(b) Montrer que pour tout entier n, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2}$.

(c) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(d) Conclure.

(3) (a) Montrer que le polynôme $x^{30} + 14x^{17} - 7x^5 - 7$ admet au moins une racine dans l'intervalle $]0,1[$.

(b) Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

(4) Application 1 :

(a) Soit f une application continue de $I = [a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$. Montrer que f admet un point fixe

(b) Soit f une application continue de $I = [a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $[a,b] \subset f([a,b])$. Montrer que f admet un point fixe.

(5) Application 2 : formule de la moyenne : Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f et g deux fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ avec f continue et g continue par morceaux et positive.

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$.

(6) Application 3 [Epreuve M1 - 2011] : Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

(a) Montrer que, pour tout entier n non nul, il existe $c_n \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ tel que $f(c_n) = f\left(c_n + \frac{1}{n}\right)$.

Indication : on pourra considérer la fonction f_n définie sur $\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ par :

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$$

et écrire $f(1) - f(0)$ en fonction de f_n.

(b) Montrer que si on remplace $\frac{1}{n}$ par un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$ le résultat précédent n'est plus vrai. On pourra considérer la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right).$$

(7) Notre objectif dans cet exercice est d'établir la proposition suivante :

Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective est strictement monotone.

Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose :

$\exists (x_1,y_1) \in I^2, x_1 < y_1$ et $f(x_1) \geq f(y_1)$ et $\exists (x_2,y_2) \in I^2, x_2 < y_2$ et $f(x_2) \leq f(y_2)$

Montrer que la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2)$$

s'annule. Conclure.

(8) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Indication : poser $g(x) = f(x) - x$. Que se passe-t-il en $\pm\infty$ si g ne s'annule pas ?

(9) Soit $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues vérifiant $fog = gof$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Indication : supposons $f - g > 0$ et considérons un point fixe de g, noté x_0. Que dire de la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$?