Développement asymptotique des zéros des polynômes ultra-sphériques et application au préconditionnement des méthodes spectrales : cas des dimensions 1 et 2

Magali RIBOT
MAPLY, CNRS et Université Claude Bernard-Lyon1, 21 avenue Claude Bernard, 69622 Villeurbanne Cedex

Michelle SCHATZMAN
MAPLY, CNRS et Université Claude Bernard-Lyon1, 21 avenue Claude Bernard, 69622 Villeurbanne Cedex

Mots-clefs : Préconditionnement, Méthodes spectrales, Méthodes d'éléments finis, Matrices de masse, Polynômes ultra-sphériques, Théorème des fonctions implicites, Méthode de la phase stationnaire.

1 Introduction

Les méthodes spectrales produisent des matrices pleines et leur efficacité numérique dépend donc du choix de préconditionneurs adaptés. Dans le cas d'un opérateur de Laplace – ou plus généralement d'un opérateur elliptique – diverses méthodes ont été proposées pour préconditionner : en 1980, Orszag [11] a suggéré de préconditionner par des différences finies; il donne un argument pour l'équivalence spectrale des matrices de rigidité spectrales et des différences finies dans le cas de conditions aux bords périodiques et d'une base de Fourier et affirme que cette équivalence est encore vraie dans de nombreux autres cas. Haldenwang et al. [9] donnent un argument pour l'équivalence entre les matrices de rigidité des différences finies et de l'approximation spectrale de Chebychev. Dans [3], Canuto et Quarteroni ont testé un grand nombre de préconditionneurs pour les méthodes spectrales de Chebychev, dont le préconditionnement par des éléments finis et ont donné une estimation numérique des rayons spectraux des différentes méthodes; dans [5], Deville et Mund testent différentes méthodes d'éléments finis pour un problème fixé et dans [6], ils étendent leurs idées à une classe plus générale de polynômes orthogonaux.
Préconditionner par des éléments finis produit des opérateurs auto-adjoints, sans coût supplémentaire par rapport aux différences finies; de plus, on connaît plus de résultats pour le préconditionnement par des opérateurs auto-adjoints que par des opérateurs non auto-adjoints.
Soit K_S la matrice de rigidité associée à une méthode de Gauss–Lobatto–Legendre pour $-d^2/dx^2$ avec des conditions aux bords de Dirichlet et soit K_F la matrice de rigidité associée à la méthode des éléments finis P^1 construits sur les noeuds de la méthode spectrale. On appelle également M_S la matrice de masse spectrale et M_F la matrice de masse mass-lumpée des éléments finis.
Des résultats de Parter [13] donnent les bornes suivantes :

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\Re(K_F M_S M_F^{-1} U, U)}{(K_S U, U)} \leq \frac{|(K_F M_S M_F^{-1} U, U)|}{(K_S U, U)} \leq C,$$

où (,) est le produit scalaire hermitien. Ces résultats sont obtenus à partir de [12], qui utilise lui-même des résultats de Gatteschi [7]. Quand M_F n'est pas mass-lumpée, Parter démontre un résultat analogue dans [14].
Le résultat principal de cet article (Proposition 4.1) est l'équivalence spectrale de

$$M_S^{1/2} M_F^{-1/2} K_F M_F^{-1/2} M_S^{1/2}$$

et de K_S. D'après un résultat de Parter et Rothman [15], il suffit de prouver l'équivalence spectrale de $M_S^{1/2}M_F^{-1/2}K_FM_F^{-1/2}M_S^{1/2}$ et de K_F.
Cette question est motivée par la preuve dans [16] de l'ordre et de la consistance du residual smoothing scheme introduit par Averbuch et al.[1], qui permet l'intégration en temps de problèmes paraboliques avec une discrétisation spectrale en espace.
Pour montrer le résultat précédemment cité, nous avons besoin du développement asymptotique des polynômes ultra-sphériques et de leurs zéros. Pour cela, nous utilisons une méthode de type phase stationnaire, nouvelle par rapport aux méthodes de Sturm ou de descente couramment utilisées dans ce domaine. La différence avec la méthode de la phase stationnaire classique est qu'ici la phase est une fonction non linéaire du grand paramètre et de la variable d'intégration au lieu d'être le produit du grand paramètre par une fonction de la variable d'intégration.
L'article est organisé ainsi : dans la section 2, nous donnons nos notations et définitions; dans la section 3, nous expliquons brièvement l'équivalence des matrices de masse en norme L^∞. La section 4 contient une idée de la preuve de l'équivalence spectrale de $M_F^{-1/2}M_S^{1/2}K_FM_S^{1/2}M_F^{-1/2}$ et de K_F. Enfin, dans la section 5, nous étendons les résultats des premières sections à la dimension 2.
Nous donnons ici uniquement les idées des preuves pour les sections 3 et 4; les détails se trouvent dans [17].

2 Notations, définitions

Soit $\mathbb{P}_N$ l'espace des fonctions polynômes de degré N définies sur $[-1,1]$ et soit $\mathbb{P}_N^0$ le sous-espace des fonctions p de $\mathbb{P}_N$ telles que $p(-1)=p(1)=0$. On note également $C^0([-1,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$ et $C_0^0([-1,1])$ le sous-espace des fonctions f de $C^0([-1,1])$ qui s'annulent en -1 et en 1.
Soit L_N le polynôme de Legendre de degré N et notons $-1=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_{N-1}<\xi_N=1$ les racines de $(1-x^2)L_N'$; soit ρ_k, $0\le k\le N$, les poids de la formule de quadrature de Gauss–Lobatto–Legendre associés aux noeuds ξ_k; ils sont strictement positifs et vérifient

$$\forall\Phi\in\mathbb{P}_{2N-1},\ \int_{-1}^{1}\Phi(x)dx=\sum_{k=0}^{N}\Phi(\xi_k)\rho_k. \tag{1}$$

Bernardi et Maday [2] ont donné des expressions explicites des ρ_k :

$$\begin{aligned}\rho_0=\rho_N&=\frac{2}{N(N+1)},\\ \rho_k&=\frac{2}{N(N+1)L_N^2(\xi_k)},\ 1\le k\le N-1.\end{aligned} \tag{2}$$

Pour k dans $\{0,\dots,N\}$, on note l_k les polynômes de Lagrange construits sur les noeuds ξ_k. Ils forment une base de $\mathbb{P}_N^0$.
Soit u et v dans $\mathbb{P}_N^0$; leur produit scalaire associé à la méthode de collocation sur les noeuds ξ_k vaut

$$(u,v)_N=\sum_{k=0}^{N}u(\xi_k)v(\xi_k)\rho_k.$$

Alors, les coefficients de la matrice de masse M_S sont égaux à

$$(M_S)_{i,j}=\delta_{i,j}\rho_j,\ 1\le i,j\le N-1$$

et ceux de la matrice de rigidité K_S valent

$$(K_S)_{i,j} = \sum_{k=0}^{N} \rho_k l_i'(\xi_k) l_j'(\xi_k). \tag{3}$$

Soit $\mathbf{1}_{[a,b]}$ la fonction caractéristique de $[a,b]$. L'espace V_N des éléments finis P_1 est un sous-espace de dimension (N-1) de $C_0^0([-1,1])$ engendré par les fonctions chapeau ϕ_k, pour $k \in \{1,\dots,N-1\}$,

$$\phi_k(x) = \frac{x-\xi_{k-1}}{\xi_k-\xi_{k-1}}\mathbf{1}_{[\xi_{k-1},\xi_k]}(x) + \frac{\xi_{k+1}-x}{\xi_{k+1}-\xi_k}\mathbf{1}_{[\xi_k,\xi_{k+1}]}(x). \tag{4}$$

Pour des raisons algorithmiques , on choisit de mass-lumper la matrice de masse des éléments finis et la matrice M_F est alors la matrice diagonale $(N-1)\times(N-1)$ avec comme coefficients diagonaux

$$(\xi_2-\xi_0)/2,\dots,(\xi_{i+1}-\xi_{i-1})/2,\dots,(\xi_N-\xi_{N-2})/2.$$

La matrice de rigidité K_F est une matrice tridiagonale $(N-1)\times(N-1)$ donnée par

$$(K_F)_{i,j} = \int_{-1}^{1} \phi_i'(x)\phi_j'(x)dx. \tag{5}$$

Ses coefficients non nuls valent

$$(K_F)_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{\xi_i-\xi_{i-1}} + \dfrac{1}{\xi_{i+1}-\xi_i}, & \text{si } i=j, \\ \dfrac{1}{\xi_{i-1}-\xi_i}, & \text{si } i=j+1, \\ \dfrac{1}{\xi_i-\xi_{i+1}}, & \text{si } i=j-1. \end{cases} \tag{6}$$

L'opérateur α_N^F envoie un vecteur r de $\mathbb{R}^{N-1}$ sur la fonction affine par morceaux qui interpole les valeurs r_j aux noeuds ξ_j, i.e. :

$$\alpha_N^F(r) = \sum_{k=1}^{N-1} r_k\phi_k. \tag{7}$$

Soit $U=(U_1,\dots,U_{N-1})$ un élément de $\mathbb{R}^{N-1}$; au besoin, nous poserons $U_0=U_N=0$. On a l'égalité suivante :

$$\left|\alpha_N^F U\right|_1^2 = U^* K_F U = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(U_{k+1}-U_k)^2}{\xi_{k+1}-\xi_k}.$$

On définit η_k par

$$\eta_k = \mathrm{Arccos}(\xi_k). \tag{8}$$

Comme nous avons les inégalités

$$-1=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_{N-1}<\xi_N=1,$$

nous en déduisons que

$$0=\eta_N<\eta_{N-1}<\cdots<\eta_1<\eta_0=\pi. \tag{9}$$

Les matrices M_S et M_F sont diagonales; les éléments diagonaux de $M_F^{-1}M_S$ sont donnés par :

$$\sigma_k = \frac{2\rho_k}{\xi_{k+1}-\xi_{k-1}}, \quad \text{pour } 1\le k\le N-1. \tag{10}$$

Du début de l'article jusqu'à l'équation (20), nous posons $\sigma_0=\sigma_N=0$; à partir de l'équation (20), nous posons $1/\sigma_0=1/\sigma_N=0$.

Remarque 2.1 *Comme L_N est pair (resp. impair) lorsque N est pair (resp. impair), nous avons*

$$\xi_{N-k} = -\xi_k, \quad \textit{pour } 1 \leq k \leq N-1 \tag{11}$$

et, d'après l'équation (8),

$$\eta_{N-k} = \pi - \eta_k, \quad \textit{pour } 1 \leq k \leq N-1. \tag{12}$$

D'où, en utilisant les formules (2) *et* (10),

$$\rho_{N-k} = \rho_k, \quad \textit{pour } 1 \leq k \leq N-1 \tag{13}$$

et

$$\sigma_{N-k} = \sigma_k, \quad \textit{pour } 1 \leq k \leq N-1. \tag{14}$$

3 Equivalence de M_F et M_S en norme d'opérateur L^∞

Nous montrons dans cette section que les matrices diagonales $M_F^{-1}M_S$ sont bornées inférieurement et supérieurement indépendamment de N pour la norme d'opérateur L^∞; il suffit de montrer que les coefficients σ_k de la diagonale de $M_F^{-1}M_S$ sont bornés.

Théorème 3.1 *Il existe $\tau > 0$ tel que pour tout $N \geq 2$, pour tout $k \in \{1 \dots N-1\}$,*

$$\tau^{-1} \leq \sigma_k \leq \tau. \tag{15}$$

Preuve : La preuve du théorème repose sur les estimations suivantes pour ρ_k en fonction de ξ_k (Lemme 1.14 du Chapitre III de [2]) :

$$cN^{-1}(1-\xi_k^2)^{1/2} \leq \rho_k \leq c'N^{-1}(1-\xi_k^2)^{1/2}, \text{ for } k \text{ in } \{1, \dots, N-1\}.$$

et sur les majorations et minorations suivantes de η_k (Théorèmes 6.21.2 et 6.21.3 du livre de Szegő [18]) :

$$\pi \max\left(\frac{2k-1}{2N+1}, \frac{k-1}{N}\right) \leq \pi - \eta_k \leq \pi \min\left(\frac{2k+2}{2N+1}, \frac{k+1/2}{N}\right)$$

Nous conseillons au lecteur de consulter la quatrième édition, plus complète, du livre de Szegő [18]. □

4 Equivalence de $M_F^{1/2}$ et $M_S^{1/2}$ en norme H^1 discrète

Pour obtenir l'erreur de consistance du residual smoothing scheme [16], nous avons besoin de montrer que les matrices de masse $M_F^{1/2}$ et $M_S^{1/2}$ sont équivalentes en tant qu'opérateurs de $\mathbb{H}_N^1$ dans $\mathbb{H}_N^1$.
Nous introduisons la norme H^1 discrète : l'espace $\mathbb{R}^{N-1}$ est muni de la norme

$$\|U\|_{\mathbb{H}_N^1} = \left|\alpha_N^F U\right|_1 = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{|U_{k+1} - U_k|^2}{\xi_{k+1} - \xi_k}\right)^{1/2}, \tag{16}$$

avec U_0 et U_N nuls. Nous notons $\mathbb{H}_N^1$ l'espace $\mathbb{R}^{N-1}$ muni de la norme (16).
Dans cette section, nous prouvons le résultat suivant :

Proposition 4.1 *Les matrices $M_F^{-1/2}M_S^{1/2}$ et leurs inverses sont bornées uniformément en norme H^1 discrète, i.e. il existe une constante C telle que pour tout $N \geq 2$, et pour tout vecteur $U \in \mathbb{R}^{N-1}$ on ait les inégalités suivantes :*

$$C^{-1} \leq \frac{\|M_F^{-1/2}M_S^{1/2}U\|_{\mathbb{H}_N^1}}{\|U\|_{\mathbb{H}_N^1}} \leq C.$$

4.1 Simplification du problème

Le carré de la norme de l'opérateur $M_F^{-1/2}M_S^{1/2}$ est égal à

$$\max\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\left|\sqrt{\sigma_{k+1}}U_{k+1}-\sqrt{\sigma_k}U_k\right|^2}{\xi_{k+1}-\xi_k} : \|U\|_{\mathbb{H}_N^1}=1\right\}. \tag{17}$$

Nous allons transformer cette expression en quelque chose de plus facile à manier. Tout d'abord, nous avons l'égalité :

$$\begin{aligned}\sqrt{\sigma_{k+1}}U_{k+1}-\sqrt{\sigma_k}U_k = &\left(\frac{\sqrt{\sigma_{k+1}}+\sqrt{\sigma_k}}{2}\right)(U_{k+1}-U_k)\\ &+\left(\frac{\sqrt{\sigma_{k+1}}-\sqrt{\sigma_k}}{2}\right)(U_{k+1}+U_k)\,;\end{aligned}$$

nous déduisons de l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\left|\sqrt{\sigma_{k+1}}U_{k+1}-\sqrt{\sigma_k}U_k\right|^2}{\xi_{k+1}-\xi_k} \leq 2&\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\sqrt{\sigma_{k+1}}+\sqrt{\sigma_k}}{2}\right)^2\frac{|U_{k+1}-U_k|^2}{\xi_{k+1}-\xi_k}\\ &+\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\left(\sqrt{\sigma_{k+1}}-\sqrt{\sigma_k}\right)^2}{2}\frac{|U_{k+1}+U_k|^2}{\xi_{k+1}-\xi_k}.\end{aligned} \tag{18}$$

La première somme du membre de droite de (18) est majorée par

$$2\max_{0\leq k\leq N}\sigma_k\,\|U\|_{\mathbb{H}_N^1}^2\,,$$

et comme, d'après le Théorème 3.1, σ_k est borné indépendamment de N et de k, il reste à majorer la seconde somme du membre de droite de (18).
Nous allons maintenant obtenir un majorant de cette somme, plus simple d'un point de vue algébrique. Tout d'abord, nous remarquons que la constante de Hölder de $U \in \mathbb{H}_N^1$ peut être majorée par $\|U\|_{\mathbb{H}_N^1}$; plus précisément, nous déduisons de l'inégalité de Cauchy-Schwarz le lemme suivant:

Lemme 4.2 *Soit U appartenant à $\mathbb{H}_N^1$. Pour tout i et j dans $\{0,\ldots,N\}$, nous avons l'inégalité suivante*

$$|U_j-U_i| \leq \|U\|_{\mathbb{H}_N^1}(\xi_j-\xi_i)^{1/2}. \tag{19}$$

Nous déduisons alors de (19) la majoration :

$$|U_k+U_{k+1}|^2 \leq (2-|\xi_k|-|\xi_{k+1}|)\,\|U\|_{\mathbb{H}_N^1}^2\,.$$

Nous observons également que $\left|\sqrt{\sigma_{k+1}}-\sqrt{\sigma_k}\right|$ et $|1/\sigma_{k+1}-1/\sigma_k|$ sont des quantités équivalentes.

Ainsi, pour majorer $M_F^{-1/2}M_S^{1/2}$ en norme d'opérateur $\mathbb{H}_N^1$, il suffit de majorer

$$\Sigma_N = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(2-|\xi_{k+1}|-|\xi_k|)}{\xi_{k+1}-\xi_k}\left|\frac{1}{\sigma_{k+1}}-\frac{1}{\sigma_k}\right|^2. \tag{20}$$

Nous posons à partir de maintenant $1/\sigma_0 = 0$ et $1/\sigma_N = 0$ et nous définissons

$$\mu_k = \frac{(2-|\xi_{k+1}|-|\xi_k|)}{\xi_{k+1}-\xi_k}\left|\frac{1}{\sigma_{k+1}}-\frac{1}{\sigma_k}\right|^2. \tag{21}$$

Notons que $M_F^{1/2}M_S^{-1/2}$ peut être majoré de la même manière : au lieu de (17), nous considérons

$$\max\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\left|U_{k+1}/\sqrt{\sigma_{k+1}}-U_k/\sqrt{\sigma_k}\right|^2}{\xi_{k+1}-\xi_k} : \|U\|_{\mathbb{H}_N^1}=1\right\}.$$

Nous procédons de même que pour (18), et comme σ_k est minoré par une constante strictement positive uniformément en k et en N, il suffit d'estimer

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_{k+1}}}-\frac{1}{\sqrt{\sigma_k}}\right)^2\frac{|U_{k+1}+U_k|^2}{\xi_{k+1}-\xi_k}.$$

Comme $\left|1/\sqrt{\sigma_{k+1}}-1/\sqrt{\sigma_k}\right|$ et $|1/\sigma_{k+1}-1/\sigma_k|$ sont des quantités équivalentes, $M_F^{1/2}M_S^{-1/2}$ est borné en norme d'opérateur $\mathbb{H}_N^1$ si (20) est borné indépendamment de N.

4.2 Idée de la démonstration

Nous allons donc démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.3 *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $N \geq 2$,*

$$\Sigma_N = \sum_{k=0}^{N-1}\mu_k \leq C, \tag{22}$$

où μ_k est défini à l'équation (21).

D'après les symétries (11) et (14), nous avons

$$\mu_{N-k} = \mu_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Soit $N' = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$; il suffit d'estimer

$$\Sigma'_N = \sum_{k=0}^{N'}\mu_k$$

car $\Sigma_N \leq 2\Sigma'_N$.
Pour majorer Σ'_N, nous avons besoin de développements asymptotiques précis de ξ_k et σ_k; et pour cela, nous utilisons ou calculons des développements asymptotiques pour les polynômes de Legendre L_N et leurs dérivées successives.
Voici les asymptotiques pour les polynômes de Legendre et leurs dérivées que l'on peut trouver dans Szegő [18] :

Tout d'abord, si N tend vers $+\infty$ et si z est borné par πK, alors

$$L_N\left(\cos\frac{z}{N}\right) \sim J_0(z)$$

où J_0 est la fonction de Bessel; on a un équivalent analogue pour L'_N (formule (8.1.1) de Szegő [18]). D'où, dans la région $1 \leq k \leq K$, où K est fini, il suffit de trouver la limite de μ_k lorsque N tend vers $+\infty$ grâce aux équivalents ci-dessus. Ceci est l'objet de la sous-section 4.3.
Ensuite, si Λ appartient à $(0, 1/2)$ et z à $[\pi\Lambda N, \pi(1-\Lambda)N]$, la formule (8.21.14) de Szegő [18] nous donne des développements asymptotiques de $L_N(\cos(z/N))$ et de ses dérivées avec des restes uniformes sur l'intervalle $[\pi\Lambda N, \pi(1-\Lambda)N]$. Donc, dans la région $\lfloor \Lambda N \rfloor \leq k \leq N'$, présentée dans la sous-section 4.4, nous utilisons ces développements et un théorème quantitatif des fonctions implicites pour obtenir une asymptotique de ξ_k et en déduire un développement de μ_k.
Finalement, dans la région $K \leq k \leq \lfloor \Lambda N \rfloor$, pour laquelle nous n'avons pas de développements asymptotiques, nous partons de la représentation intégrale

$$L_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x + i\sqrt{1-x^2}\,\cos\varphi\right)^N d\varphi,$$

et de formules analogues pour les dérivées de L_N. Nous adaptons alors la méthode de la phase stationnaire décrite dans le livre de Hörmander [10] à une phase non linéaire par rapport au grand paramètre et nous obtenons des formules asymptotiques de L_N et de ses dérivées sur l'intervalle $[\xi_K, \xi_{\lfloor \Lambda N \rfloor + 1}]$ (Lemme 4.9), que l'on applique jusqu'à un ordre approprié. On conclut en appliquant le même théorème des fonctions implicites que précédemment pour obtenir une asymptotique des zéros ξ_k de L'_N dans la région $K \leq k \leq \lfloor \Lambda N \rfloor$ et on en déduit un développement pour μ_k. Ceci est expliqué dans la sous-section 4.5.
Par conséquent, nous séparons l'intervalle $\{0, \ldots, N'\}$ en trois sous-intervalles $\{0, \ldots, K\}$, $\{K+1, \ldots, \lfloor \Lambda N \rfloor\}$ et $\{\lfloor \Lambda N \rfloor + 1, \ldots, N'\}$ où K est borné et sera choisi plus tard et Λ appartient à l'intervalle ouvert $(0, 1/2)$.

4.3 La région $0 \leq k \leq K$

D'abord, montrons que la somme des μ_k est bornée quand k est dans une région bornée proche de 0.

Théorème 4.4 *Pour tout $K > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $N \geq 2$,*

$$\sum_{0 \leq k \leq K} \mu_k \leq C, \tag{23}$$

où μ_k est défini à l'équation (21).

Preuve : Comme K est fini, il suffit de trouver la limite de μ_k, $0 \leq k \leq K$ quand $N \to +\infty$. Soit J_l la fonction de Bessel d'indice l. Soit z_k le k-ème zéro positif de J_1; le Théorème 8.1.2 de Szegő [18] implique que, pour $k \geq 1$,

$$\pi - \eta_k = \frac{z_k}{N} + o(1/N), \text{ quand } N \text{ tend vers } +\infty \tag{24}$$

et on déduit du Théorème 8.1.1 de Szegő [18] que

$$\lim_{N\to\infty} L_N^2(\xi_k) = J_0^2(z_k). \tag{25}$$

Ainsi, μ_k a une limite bornée quand N tend vers $+\infty$, qui est

$$\lim_{N\to+\infty} \mu_k = \frac{z_{k+1}^2 + z_k^2}{64(z_{k+1}^2 - z_k^2)} \left|(z_{k+1}^2 - z_{k-1}^2)J_0^2(z_k) - (z_{k+2}^2 - z_k^2)J_0^2(z_{k+1})\right|^2.$$

□

4.4 La région $\lfloor \Lambda N \rfloor \leq k \leq N'$

Notons $P_N^{(\lambda)}$ le polynôme ultra-sphérique de degré N, i.e. le polynôme orthogonal de degré N relatif au poids $(1-x^2)^{\lambda-1/2}$. Les dérivées de ces polynômes sont données par la formule (4.7.14) de Szegő [18], c'est-à-dire.

$$\frac{d}{dx}P_N^{(\lambda)}(x) = 2\lambda P_{N-1}^{(\lambda+1)}(x) \tag{26}$$

Remarque 4.5 *Le polynôme de Legendre L_N de degré N est précisément égal à $P_N^{(1/2)}$, et d'après la formule* (26) *ci-dessus, L'_N est égal à $P_{N-1}^{(3/2)}$.*

Pour obtenir un développement asymptotique de μ_k pour $k \in \{\lfloor \Lambda N \rfloor, \ldots, N'\}$, il nous faut d'abord une asymptotique des zéros de $P_N^{(3/2)}$.
Il est plus pratique d'énoncer le lemme suivant dans un intervalle symétrique autour de $N/2$:

Lemme 4.6 *Soit*

$$\theta_{0,k} = \frac{\pi/4 + k\pi}{N + 3/2}.$$

Pour tout $\Lambda \in (0, 1/2)$, il existe des constantes C, C' telles que pour tout $N \geq 2$ et pour tout entier k de $\{\lfloor \Lambda N \rfloor, \ldots, \lceil (1-\Lambda)N \rceil\}$, il existe un unique zéro θ_k de $P_N^{(3/2)}(\cos\theta)$ dans une boule de rayon C'/N^2 autour de $\theta_{0,k}$; de plus, on a l'estimation suivante

$$\left| \theta_k - \theta_{0,k} + \frac{3}{8N^2 \tan\theta_{0,k}} - \frac{9}{8N^3 \tan\theta_{0,k}} \right| \leq CN^{-4}. \tag{27}$$

Preuve : L'idée de la preuve est d'utiliser le théorème quantitatif des fonctions implicites de [4]; nous l'énonçons ici :

Lemme 4.7 *Soit X et Z des espaces de Banach, et soit f une fonction C^2 d'un voisinage $\mathcal{U}$ de $x_0 \in X$ dans Z. Soit $z_0 = f(x_0)$. Supposons que $A = Df(x_0)$ ait un inverse borné A^{-1} et que la boule de rayon ρ et de centre x_0 soit incluse dans $\mathcal{U}$. Soit*

$$M = \sup_{|\xi| \leq \rho} \|A^{-1} D^2 f(x_0 + \xi)\|.$$

Il existe des constantes a et K définies par

$$a = \min(1, (2\rho M)^{-1}), \quad K = \frac{3a\rho}{4}$$

telles que si $|A^{-1}z_0| \leq K$, l'équation

$$f(x) = 0$$

possède une unique solution dans la boule $\{|x - x_0| \leq a\rho\}$; de plus, cette solution vérifie

$$|x - x_0| \leq 2|A^{-1}z_0| \text{ et } |x - x_0 + A^{-1}z_0| \leq 2M|A^{-1}z_0|^2.$$

On pose

$$\omega_{N,\lambda} = \binom{N+\lambda-1}{N} = \frac{\Gamma(N+\lambda)}{\Gamma(N+1)\Gamma(\lambda)}; \tag{28}$$

la formule (8.21.14) de Szegő [18] utilisée est la suivante :

$$\begin{aligned} P_N^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2\omega_{N,\lambda}}{(2\sin\theta)^\lambda} \sum_{\nu=0}^{p-1} \omega_{\nu,\lambda} \frac{(1-\lambda)\ldots(\nu-\lambda)}{(N+\lambda-1)\ldots(N+\lambda-\nu)} \\ \times \frac{\cos\big((N-\nu+\lambda)\theta - (\nu+\lambda)\pi/2\big)}{(2\sin\theta)^\nu} + O(N^{\lambda-p-1}) \end{aligned} \tag{29}$$

et elle est uniforme en θ appartenant à $[\Lambda/2, \pi/2]$ et en N.
On applique alors le lemme (4.7) à

$$f(\theta, N) = \frac{(2\sin\theta)^{3/2}}{2\omega_{N,3/2}} P_N^{(3/2)}(\cos\theta); \tag{30}$$

dans le voisinage $[\theta_{0,k} - rN^{-2}, \theta_{0,k} + rN^{-2}]$ où r est à choisir. On utilise les asymptotiques de $P_N^{(\lambda)}$ donnée par l'équation (29) pour $\lambda = 3/2$ et $p = 3$, $\lambda = 5/2$ et $p = 2$ et finalement $\lambda = 7/2$ et $p = 1$ afin de calculer $f(\theta_{0,k}, N)$ et les dérivées $\partial f/\partial\theta(\theta_{0,k}, N)$ et $\partial f/\partial\theta(\theta, N)$ pour θ dans $[\theta_{0,k} - rN^{-2}, \theta_{0,k} + rN^{-2}]$. □
On peut alors estimer la somme des μ_k quand k est proche de son majorant N', i.e. dans la région $\lfloor \Lambda N \rfloor \leq k \leq N'$.

Corollaire 4.8 *Pour tout $\Lambda \in (0, 1/2)$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $N \geq 2$,*

$$\sum_{\lfloor \Lambda N \rfloor \leq k \leq N'} \mu_k \leq CN^{-4}. \tag{31}$$

Preuve : D'après la Remarque 4.5 et l'équation (9), on passe des racines θ_k de $P_N^{(3/2)}$ calculées au Lemme (4.6) aux η_k définis en (8) en remplaçant N par $N-1$ et k par $N-k$.
Nous posons

$$\eta_{0,k} = \pi - \frac{\pi/4 + k\pi}{N + 1/2} = \frac{(N-k)\pi + \pi/4}{N + 1/2} \tag{32}$$

et nous avons l'asymptotique

$$\eta_k = \eta_{0,k} - \frac{3}{8N^2 \tan\eta_{0,k}} \left(1 - \frac{1}{N}\right) + O(N^{-4}), \tag{33}$$

où le terme d'erreur est uniforme en N et en $k \in \{\lfloor \Lambda N \rfloor, \ldots, N'\}$.
On applique le développement asymptotique de $L_N = P_N^{(1/2)}$ donné par l'équation (29) en $\theta = \eta_k$ et on obtient

$$P_N^{(1/2)}(\cos\eta_k) = (-1)^{N-k} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi N \sin\eta_{0,k}}} \left(1 - \frac{1}{4N} + \frac{1}{32N^2} + O(N^{-3})\right), \tag{34}$$

ce qui nous donne avec l'équation (33),

$$\frac{1}{\sigma_k} = 1 - \frac{\pi^2}{6N^2} + O(1/N^3). \tag{35}$$

Ainsi, on peut estimer la somme

$$\sum_{k=\lfloor \Lambda N \rfloor}^{N'} \frac{(2 - |\xi_{k+1}| - |\xi_k|)}{\xi_{k+1} - \xi_k} \left| \frac{1}{\sigma_{k+1}} - \frac{1}{\sigma_k} \right|^2. \tag{36}$$

La différence $1/\sigma_{k+1} - 1/\sigma_k$ est un $O(N^{-3})$; le terme $2 - |\xi_k| - |\xi_{k+1}|$ est un $O(1)$ et $\xi_{k+1} - \xi_k$ est supérieur ou égal à C/N; comme la somme comprend $O(N)$ termes, on voit que la somme est un $O(N^{-4})$. □

4.5 La région $K \leq k \leq \lfloor \Lambda N \rfloor$

Dans cette dernière région, avant d'appliquer le théorème des fonctions implicites comme dans la région précédente, il nous faut établir des formules asymptotiques pour les $P_N^{(\lambda)}$.
Pour cela, on part de la représentation intégrale de $P_N^{(\lambda)}$ donnée par la formule (4.10.3) de Szegő [18] et on adapte la méthode de la phase stationnaire. On obtient alors le lemme suivant :

Lemme 4.9 *Soit $\lambda = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, \ldots$. Il existe des polynômes réels $Q_{\nu,\lambda}$ de degré ν pour tout $\nu \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $K \in \mathbb{N}$ et pour tout $\Lambda \in (0, 1/2)$, on ait le développement suivant pour tout $N \geq 2$ et pour tout $z \in [\pi K, \pi \Lambda N]$:*

$$\begin{aligned} &\left| P_N^{(\lambda)}(\cos(z/N)) - 2\sqrt{\pi} Z(\lambda, N) \Re \left\{ i e^{iz} \sum_{\nu=\lambda-1/2}^{k-1} \chi_N^{-(\nu+1/2)} Q_{\nu,\lambda}(\chi_N/N) \right\} \right| \\ &\qquad \leq C(K, \Lambda, k, \lambda) \left(N^{-1} + z^{-1} \right)^{k-2\lambda+1}, \end{aligned} \tag{37}$$

où $C(K, \Lambda, k, \lambda)$ dépend uniquement des variables entre parenthèses et où $Z(\lambda, N)$ est défini par

$$Z(\lambda, N) = \frac{2^{1-2\lambda}}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(N + 2\lambda)}{N!}. \tag{38}$$

Preuve :
Soit $Z(\lambda, N)$ défini à l'équation (38), on a la formule suivante pour $\lambda > 0$ et pour $x \in [-1, 1]$ (formule (4.10.3) de Szegő [18]) :

$$P_N^{(\lambda)}(x) = Z(\lambda, N) \int_0^\pi \left(x + i\sqrt{1 - x^2} \cos \varphi \right)^N \sin^{2\lambda-1} \varphi \, d\varphi. \tag{39}$$

On définit les fonctions

$$f_N(z, \varphi) = \big(\cos(z/N) + i \sin(z/N) \cos \varphi \big)^N$$

et g_N telle que $f_N = \exp g_N$, i.e.

$$g_N(z, \varphi) = N \ln \big(\cos(z/N) + i \sin(z/N) \cos \varphi \big)$$

où l'on a choisi la représentation principale du logarithme.
On déduit de (39) l'expression des polynômes ultra-sphériques en $x = \cos(z/N)$:

$$P_N^{(\lambda)}(\cos(z/N)) = \frac{Z(\lambda, N)}{2} \Re \left(\int_0^{2\pi} \exp g_N(z, \varphi) \sin^{2\lambda-1} \varphi \; d\varphi \right) \tag{40}$$

Dans nos calculs, nous aurons souvent besoin de la remarque suivante :

Remarque 4.10 *La fonction g_N est une fonction paire de φ et par conséquent ses dérivées d'ordre impair s'annulent en $\varphi = 0$.*

On cherche une formule asymptotique pour $\int_0^{2\pi} f_N(z, \varphi) \sin^{2\lambda-1} \varphi \; d\varphi$.
Soit δ dans $[0, \pi/4]$ et ψ une fonction de localisation qui a les propriétés suivantes :

$$\begin{gathered} \psi \text{ est paire, } \pi\text{-périodique, de classe } C^\infty \text{ à valeurs dans } [0, 1], \\ \psi \text{ vaut 1 sur } [0, \delta] \text{ et 0 sur } [2\delta, \pi/2]. \end{gathered} \tag{41}$$

La fonction ψ va nous permettre de localiser les difficultés.

On peut alors écrire

$$\int_0^{2\pi} f_N(z,\varphi)\sin^{2\lambda-1}\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \psi(\varphi) f_N(z,\varphi)\sin^{2\lambda-1}\varphi\,d\varphi + \int_0^{2\pi}(1-\psi(\varphi)) f_N(z,\varphi)\sin^{2\lambda-1}\varphi\,d\varphi. \tag{42}$$

Nous allons utiliser une méthode de phase stationnaire pour montrer que la seconde intégrale du membre de droite de (42) est petite.
Comme nous allons utiliser plusieurs fois des techniques de phase stationnaire, nous résumons tous ces résultats dans le Lemme 4.11 suivant. Ce lemme nous donne une estimation par $(N^{-1}+z^{-1})^k$ de l'intégrale du produit de la fonction u par la fonction $\exp(g_N)$ pour n'importe quel k, à condition d'avoir une estimation adéquate sur u et ses dérivées.
Soit $p \in \mathbb{N}$ et $b \in [0,\pi)$ fixés. Soit u une fonction de classe C^p sur $[\pi K,+\infty)\times[0,b]$; on définit les normes suivantes

$$\|u\|_{p,c,l} = \max_{0\le i\le p}\max_{N\in\mathbb{N}}\max_{\substack{\varphi\in[0,b]\\ z\in[\pi K,\pi\Lambda N]}} z^{-l}\varphi^{-c+i}\left|\frac{\partial^i u}{\partial\varphi^i}(z,\varphi)\right|. \tag{43}$$

Lemme 4.11 *Soit k appartenant à $\mathbb{N}$ et b à $[0,\pi)$. Soit u dans $C_0^\infty([\pi K,+\infty)\times[0,b))$; on suppose qu'il existe $l\ge 0$ et $c\ge 2(k+l)$ tels que $\|u\|_{k+l,c,l}$ est finie. Alors, il existe C tel que pour tout $N\ge 2$ et pour tout $z\in[\pi K,\pi\Lambda N]$,*

$$\max_{s\in[0,1]}\left|\int_0^b u(z,\varphi)\exp g_N(z,\varphi,s)\,d\varphi\right| \le C\,\|u\|_{k+l,c,l}\,(N^{-1}+z^{-1})^k. \tag{44}$$

La preuve de ce lemme repose sur des intégrations par parties successives.
Pour un k fixé, on déduit donc du Lemme 4.11 que la seconde intégrale du membre de droite de (42) est majorée par $C(N^{-1}+z^{-1})^k$. Il nous faut maintenant estimer la première intégrale

$$\int_0^{2\pi}\psi(\varphi) f_N(z,\varphi)\sin^{2\lambda-1}\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\psi(\varphi)\exp g_N(z,\varphi)\sin^{2\lambda-1}\varphi\,d\varphi. \tag{45}$$

On utilise une technique d'homotopie comme dans la preuve d'Hörmander. Soit q_N la partie quadratique du développement de Taylor de $g_N(z,\cdot)$ en 0, i.e.

$$\begin{aligned} q_N(z,\varphi) &= g_N(z,0) + \frac{\varphi^2}{2}\frac{\partial^2 g_N}{\partial\varphi^2}(z,0)\\ &= iz - \frac{iN\varphi^2}{2}\sin(z/N)e^{-iz/N}; \end{aligned} \tag{46}$$

on définit

$$R_N(z,\varphi) = g_N(z,\varphi) - q_N(z,\varphi). \tag{47}$$

Les extensions de g_N et f_N comme fonctions sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]\times[0,1]$ sont données par

$$g_N(z,\varphi,s) = s g_N(z,\varphi) + (1-s)q_N(z,\varphi) = q_N(z,\varphi) + sR_N(z,\varphi) \tag{48}$$

et

$$f_N(z,\varphi,s) = \exp g_N(z,\varphi,s). \tag{49}$$

L'intégrale

$$\mathcal{I}_{N,\lambda}(z,s) = \int_0^{2\pi}\psi(\varphi)\exp g_N(z,\varphi,s)\sin^{2\lambda-1}\varphi\,d\varphi \tag{50}$$

est égale à (45) pour $s = 1$ et pour $s = 0$, elle peut être développée simplement. Ainsi, afin d'estimer $\mathcal{I}_{N,\lambda}(z,1)$, on utilise un développement de Taylor en $s = 0$, c'est-à-dire

$$\left|\mathcal{I}_{N,\lambda}(z,1) - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!}\frac{\partial^l \mathcal{I}_{N,\lambda}}{\partial s^l}(z,0)\right| \leq \max_{0\leq s\leq 1}\left|\frac{1}{k!}\frac{\partial^k \mathcal{I}_{N,\lambda}}{\partial s^k}(z,s)\right|. \tag{51}$$

Il nous faut alors des approximations explicites des termes $(\partial^l \mathcal{I}_{N,\lambda}/\partial s^l)(z,0)$ et il nous faut également estimer tous les restes : certains viennent de la différence entre $(\partial^l \mathcal{I}_{N,\lambda}/\partial s^l)(z,0)$ et son approximation; d'autres viennent de $(\partial^k \mathcal{I}_{N,\lambda}/\partial s^k)(z,s)$.
La dérivée $\partial^l \mathcal{I}_{N,\lambda}/\partial s^l$ est donnée par

$$\frac{\partial^l \mathcal{I}_{N,\lambda}}{\partial s^l}(z,s) = \int_0^{2\pi} \psi(\varphi) R_N^l(z,\varphi) \exp g_N(z,\varphi,s) \sin^{2\lambda-1}\varphi\, d\varphi. \tag{52}$$

On majore alors $\partial^k \mathcal{I}_{N,\lambda}/\partial s^k$ en utilisant une estimation des dérivées successives de R_N^l et le Lemme 4.11. Les estimations des dérivées sont obtenues en utilisant les formules de Leibniz et de Faa di Bruno (cf. [8]) et en exprimant ces dérivées en fonction de celles de g_N. Ainsi, le membre de droite de (51) est majoré par $C(N^{-1} + z^{-1})^k$.
Considérons maintenant des termes $\partial^l \mathcal{I}_{N,\lambda}/\partial s^l(z,0)$ de l'équation (51).
Soit r_N le développement de Taylor de $R_N(z,\cdot)$ en 0 à l'ordre $2(k+1)$:

$$r_N(z,\varphi) = \sum_{\gamma=2}^{k+1} \frac{\varphi^{2\gamma}}{(2\gamma)!}\frac{\partial^{2\gamma} g_N}{\partial \varphi^{2\gamma}}(z,0); \tag{53}$$

on remarquera qu'il n'y a pas de puissances impaires de φ, car R_N est pair. On définit

$$\mathcal{J}_{N,l,\lambda}(z) = \int_0^{2\pi} \psi(\varphi) r_N^l(z,\varphi) \exp(\chi_N \varphi^2/2) \sin^{2\lambda-1}\varphi\, d\varphi.$$

où $\chi_N = -iN\sin(z/N)e^{-iz/N}$. Une estimation des dérivées successives de $R_N^l - r_N^l$ appliquée au Lemme 4.11 nous permettent de majorer la différence entre $\partial^l \mathcal{I}_{N,\lambda}/\partial s^l(z,0)$ et $e^{iz}\mathcal{J}_{N,l,\lambda}(z)$ par $C(N^{-1} + z^{-1})^k$ où C est indépendant de N et de z.
Calculons donc $\mathcal{J}_{N,l,\lambda}(z)$.
Les expressions explicites que l'on va utiliser ne contiennent que les $k-l$ premiers termes de r_N^l; il faut donc estimer les $k(l-1)+1$ termes restant grâce à cette version monodimensionelle du Lemme 7.7.3 de Hörmander [10] :

Lemme 4.12 *Soit $a \neq 0$ tel que $\Im(a) \geq 0$ et soit $u \in \mathcal{S}$, l'espace de Schwartz sur $\mathbb{R}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $C > 0$ tel que*

$$\left|\int u(x) e^{iax^2/2}\, dx - \left(\frac{a}{2\pi i}\right)^{-1/2} T_p(u,a)\right| \leq C\left(\frac{1}{|a|}\right)^{p+1/2} \|u\|_{H^{2p+1}}, \tag{54}$$

avec

$$T_p(u,a) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(2ia)^{-j}}{j!}\frac{\partial^{2j} u}{\partial \varphi^{2j}}(0). \tag{55}$$

Ici, on choisit la détermination principale de la puissance fractionnaire.

Il est à noter que ce lemme nous donne une estimation du reste mais aussi une expression algébrique de $\mathcal{J}_{N,l,\lambda}(z)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{N,l,\lambda}(z) = 4i\sqrt{\pi}\sum_{j=0}^{k+l-1}\frac{1}{j!}\frac{1}{(2\chi_N)^{j+1/2}}\frac{\partial^{2j}(r_N^l(z,\varphi)\sin^{2\lambda-1}\varphi)}{\partial\varphi^{2j}}(z,0)\\ + O\left((N^{-1}+z^{-1})^{k+1/2}\right).\end{aligned} \tag{56}$$

Nous calculons enfin grâce à la formule de Faa di Bruno les dérivées de $\sin^{2\lambda-1}$ en $\varphi = 0$ ainsi que les dérivées de r_N^l en $\varphi = 0$ en fonction de celles de g_N; les dérivées de g_N en $\varphi = 0$ sont elles-mêmes calculées en utilisant encore par la formule de Faa di Bruno. De ce calcul, nous obtenons l'équation (37). □

Maintenant que nous avons calculé une formule pour les $P_N^{(\lambda)}$, nous en déduisons un développement des zéros de $P_N^{(3/2)}$.

Lemme 4.13 *Soit*

$$z_{0,k} = \frac{\pi/4 + k\pi}{1 + 3/2N}.$$

Pour tout Λ dans $(0, 1/2)$ et pour tout $K \in \mathbb{N}$, il existe C, C' tels que pour tout $N \geq 2$ et pour tout entier k dans $\{K, \ldots, \lfloor \Lambda N \rfloor\}$, il existe un unique zéro z_k de $P_N^{(3/2)}(\cos(z/N))$ dans une boule de rayon C'/N autour de $z_{0,k}$ et, de plus, on a l'estimation suivante

$$\left| z_k - z_{0,k} - \frac{13}{8N\tan(z_{0,k}/N)} + \frac{22}{3N^2\tan(z_{0,k}/N)} \right| \leq C(N^{-1} + K^{-1})^3. \tag{57}$$

Preuve : On utilise exactement la même méthode qu'au Lemme 4.6 et on utilise de nouveau le Lemme 4.7. Cette fois-ci on se sert du développement (37) appliqué pour $\lambda = 3/2$ et $k = 4$, pour $\lambda = 5/2$ et $k = 4$ et enfin pour $\lambda = 7/2$ et $k = 4$. On obtient ainsi la formule (57). □

On peut démontrer maintenant que la somme des μ_k pour k dans $\{K, \ldots, \lfloor \Lambda N \rfloor\}$ est bornée :

Corollaire 4.14 *Pour $K > 0$ assez grand et pour tout $\Lambda \in (0, 1/2)$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $N \geq 2$,*

$$\sum_{K \leq k \leq \lfloor \Lambda N \rfloor} \mu_k \leq C. \tag{58}$$

Preuve : On suit exactement la preuve du Corollaire 4.8. Soit

$$\eta_{0,k} = \frac{\pi(N - k + 1/4)}{N + 1/2}.$$

On obtient comme développement du zéro η_k de $P_{N-1}^{(3/2)}(\cos\theta) = L'_N(\cos\theta)$ la formule suivante :

$$\eta_k = \eta_{0,k} + \frac{13}{8N^2\tan\eta_{0,k}} - \frac{49}{12N^3\tan\eta_{0,k}} + O\left((N^{-1} + K^{-1})^4\right). \tag{59}$$

Alors on obtient en utilisant la formule (37) avec $\lambda = 1/2$ et $k = 3$,

$$\frac{1}{\sigma_k} = \frac{\xi_{k+1} - \xi_{k-1}}{2\rho_k} = 1 - \frac{2}{3N^2} - \frac{\pi^2}{6N^2} - \frac{49}{12N^2\tan^2\eta_{0,k}} + O\left((N^{-1} + K^{-1})^3\right) \tag{60}$$

et, en utilisant (59),

$$\frac{(2 - |\xi_{k+1}| - |\xi_k|)}{\xi_{k+1} - \xi_k} = \frac{2N}{\pi}\frac{1}{\tan(\eta_{0,k}/2)}\left(1 + O(N^{-1} + K^{-1})\right).$$

Finalement, un développement de μ_k est

$$\mu_k = \frac{C}{N^5} \frac{\cos^2 \eta_{0,k}}{\sin^6 \eta_{0,k}} \frac{1}{\tan(\eta_{0,k}/2)} \left(1 + O(N^{-1} + K^{-1})\right) \leq \frac{C}{k^5}$$

et la somme (58) est bornée. □

4.6 Fin de la preuve de la Proposition 4.1

On conclut la preuve en choisissant Λ dans l'intervalle $(0, 1/2)$; alors la somme des μ_k pour $\lfloor \Lambda N \rfloor \leq k \leq N'$ est bornée (Corollaire 4.8); pour K assez grand, la somme des μ_k pour $K \leq k \leq \lfloor \Lambda N \rfloor$ est bornée (Corollaire 4.14), et finalement, la somme des μ_k pour $k \in \{0, \ldots, K\}$ est bornée (Théorème 4.4).

5 Extension à la dimension 2

Dans cette section, nous utilisons ce que nous venons de montrer en dimension 1 pour prouver les mêmes résultats en dimension 2 sur le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

5.1 Définition des matrices en dimension 2

On considère la grille de discrétisation de Gauss-Lobatto-Legendre, c'est-à-dire

$$\Xi_N = \{(\xi_m, \xi_n), 0 \leq m, n \leq N\}.$$

On obtient donc une grille composée de rectangles et on considère tous les maillages obtenus en séparant les rectangles en deux triangles selon l'une des deux diagonales (cf Figure 1). En particulier, on considère parmi tous ces maillages les deux maillages réguliers de la Figure 2.

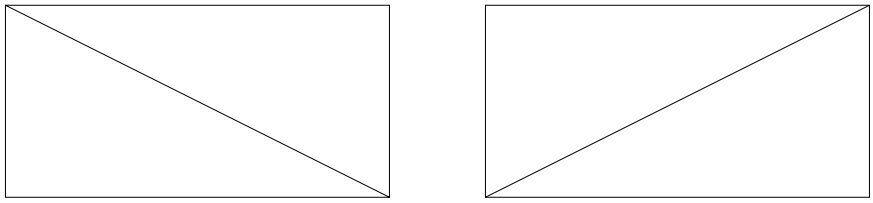

Figure 1: Les deux possibiltés de couper un rectangle en deux triangles

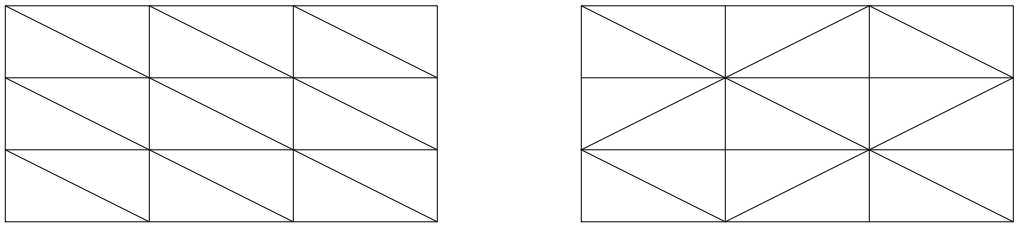

Figure 2: Les deux maillages réguliers

On remarque que les points associés à ces maillages sont toujours ceux de la grille Ξ_N.

L'équivalent de la base des fonctions de Lagrange l_k de la dimension 2 est la base des produits tensoriels $L_{(i,j)} = l_i \otimes l_j$, où le produit tensoriel $\varphi \otimes \psi$ de deux fonctions φ et ψ définies sur $\mathbb{R}$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$. Le produit scalaire correspondant est

$$(u,v)_N = \sum_{0 \leq j,k \leq N} u(\xi_j, \xi_k) v(\xi_j, \xi_k) \rho_j \rho_k.$$

Alors la matrice de masse spectrale en dimension 2, notée $M_{2,S}$, vaut

$$M_{2,S} = M_{1,S} \otimes M_{1,S} \tag{61}$$

où $M_{1,S}$ est la matrice de masse spectrale en dimension 1 et la matrice de rigidité $K_{2,S}$ vaut

$$K_{2,S} = M_{1,S} \otimes K_{1,S} + K_{1,S} \otimes M_{1,S}, \tag{62}$$

où $K_{1,S}$ est la matrice de rigidité spectrale en dimension 1.
Pour simplifier les notations, on notera, par exemple, $M_{2,S}(i,j,k,l)$ le coefficient de la matrice $M_{2,S}$ correspondant au produit scalaire des deux fonctions de base $L_{(i,j)}$ et $L_{(k,l)}$. Ainsi, $M_{2,S}(i,j,i,j)$ sera un terme diagonal de la matrice $M_{2,S}$. On notera aussi $M_{1,S}(i,j)$ le coefficient (i,j) de la matrice M_S en dimension 1.
Calculons les matrices d'éléments finis.
Dans le cas d'éléments finis Q^1, on considère comme fonction de base $\phi_{i,j}$ associée au point (ξ_i, ξ_j) le produit tensoriel de deux fonctions chapeau $\phi_i \otimes \phi_j$ où les ϕ_k sont définis à l'équation (4). Alors la matrice de masse vaut $M_{2,F} = M_{1,F} \otimes M_{1,F}$ où $M_{1,F}$ est la matrice de masse d'éléments finis en dimension 1 et la matrice de rigidité est égale à $K_{2,F} = M_{1,F} \otimes K_{1,F} + K_{1,F} \otimes M_{1,F}$ où $K_{1,F}$ est la matrice de rigidité d'éléments finis en dimension 1.
Dans le cas d'un maillage composé de triangles et donc d'éléments finis P^1, on considère comme fonction de base associée au point (ξ_i, ξ_j) la fonction $\phi_{i,j}$ affine sur chaque triangle qui vaut 1 en (ξ_i, ξ_j) et 0 en tous les autres points du maillage.
La matrice de masse $M_{2,F}$ mass-lumpée est encore une matrice de masse diagonale mais elle n'est pas exactement égale à $M_{1,F} \otimes M_{1,F}$. En fait, elle vaut

$$M_{2,F} = \frac{1}{6} D \left(M_{1,F} \otimes M_{1,F} \right) \tag{63}$$

où D est la matrice diagonale telle que $D(i,j,i,j)$ soit égal au nombre de triangles auxquels appartient le point (ξ_i, ξ_j). La Figure 3 donne un exemple de point (ξ_i, ξ_j) tel que $D(i,j,i,j) = 5$.

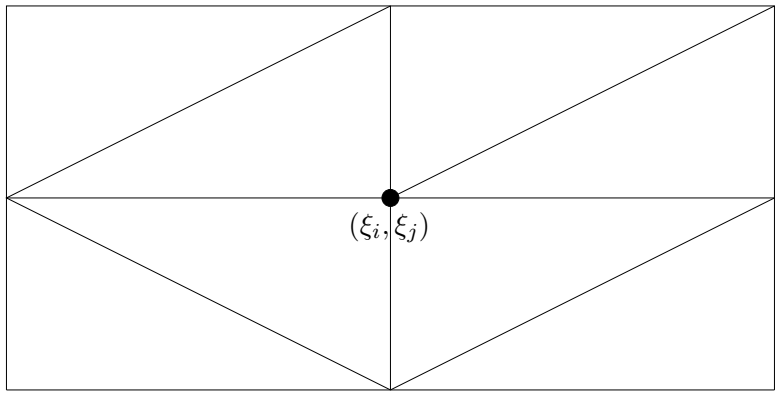

Figure 3: Exemple de point (ξ_i, ξ_j) tel que $D(i,j,i,j) = 5$

Or un point appartient à 4 rectangles et il appartient à 1 ou 2 triangles pour chaque rectangle. Il appartient donc à au moins 4 triangles et à au plus 8 triangles et donc le coefficient $D(i,j,i,j)$ est un entier compris entre 4 et 8.
D'où le coefficient (i,j,i,j) de la matrice $M_{2,F}$ vérifie les inégalités suivantes :

$$\frac{2}{3}(M_{1,F} \otimes M_{1,F})(i,j,i,j) \leq M_{2,F}(i,j,i,j) \leq \frac{4}{3}(M_{1,F} \otimes M_{1,F})(i,j,i,j). \tag{64}$$

Quant à la matrice de rigidité $K_{2,F}$, elle ne dépend pas du maillage considéré et elle vaut

$$K_{2,F} = M_{1,F} \otimes K_{1,F} + K_{1,F} \otimes M_{1,F}. \tag{65}$$

Maintenant que nous avons exprimé les matrices de masse et de rigidité en dimension 2 en fonction de celles de la dimension 1, nous pouvons nous servir des théorèmes des sections précédentes pour prouver des résultats analogues. On peut généraliser très simplement le passage de la dimension 1 à la dimension 2 pour avoir des théorèmes en dimension supérieure.

5.2 Equivalence de $K_{2,F}$ et $K_{2,S}$ en dimension 2

Parter et Rothman prouvent dans [15] le résultat suivant en dimension 1 :

Théorème 5.1 *Il existe $\kappa > 0$ tel que, pour tout $N \geq 2$ et pour tout U dans $\mathbb{R}^{N-1}$, on ait l'inégalité suivante :*

$$\kappa^{-1} U^* K_{1,F} U \leq U^* K_{1,S} U \leq \kappa U^* K_{1,F} U. \tag{66}$$

Ce Théorème se généralise en dimension 2 ainsi :

Théorème 5.2 *Soit τ défini au Théorème 3.1 et κ au Théorème 5.1. Pour tout $N \geq 2$ et pour tout U dans $\mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$, on a l'inégalité suivante :*

$$(\tau\kappa)^{-1} U^* K_{2,F} U \leq U^* K_{2,S} U \leq \kappa\tau\, U^* K_{2,F} U. \tag{67}$$

Preuve : Soit U dans $\mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$; notons $U = (U_1 \dots U_{N-1})$ où U_i, $1 \leq i \leq N-1$, est un vecteur de $\mathbb{R}^{N-1}$. On note $U(i,j)$ la j-ème composante du vecteur U_i et on définit également les vecteurs $\widetilde{U}_i$ tels que la j-ème composante du vecteur $\widetilde{U}_i$, $\widetilde{U}(i,j)$, soit égale à $U(j,i)$.
Alors $U^* K_{2,S} U$ est la somme de deux termes :

$$U^* K_{2,S} U = U^*(M_{1,S} \otimes K_{1,S} + K_{1,S} \otimes M_{1,S})U.$$

Considérons d'abord le premier terme du membre de droite. On en déduira un résultat similaire pour le deuxième terme.
On utilise la définition du produit tensoriel de deux matrices qui est, avec nos notations,

$$(A \otimes B)(i,j,k,l) = A(i,k)B(j,l),$$

et on obtient

$$\begin{aligned} U^*(M_{1,S} \otimes K_{1,S})U &= \sum_{m,n,p,q} U(m,n) M_{1,S}(m,p) K_{1,S}(n,q) U(p,q) \\ &= \sum_{m,n,q} \rho_m U(m,n) K_{1,S}(n,q) U(m,q), \end{aligned}$$

où ρ_k est défini à l'équation (2). On utilise alors le Théorème 3.1 sur l'équivalence des matrices de masse en dimension 1, et on obtient :

$$\begin{aligned} U^*(M_{1,S} \otimes K_{1,S})U &\leq \tau \sum_{m,n,q} M_{1,F}(m,m)U(m,n)K_{1,S}(n,q)U(m,q) \\ &\leq \tau \sum_m M_{1,F}(m,m)U_m^* K_{1,S} U_m; \end{aligned}$$

en utilisant alors le Théorème 5.1 sur l'équivalence des matrices de rigidité en dimension 1, on trouve

$$U^*(M_{1,S} \otimes K_{1,S})U \leq \tau\kappa \sum_m M_{1,F}(m,m)U_m^* K_{1,F} U_m = \tau\kappa\, U^*(M_{1,F} \otimes K_{1,F})U.$$

On peut montrer de même, en utilisant les vecteurs $\widetilde{U}_i$, que

$$U^*(K_{1,S} \otimes M_{1,S})U \leq \tau\kappa\, U^*(K_{1,F} \otimes M_{1,F})U$$

et donc que

$$U^* K_{2,S} U \leq \tau\kappa\, U^* K_{2,F} U.$$

□

5.3 Equivalence de $M_{2,F}$ et $M_{2,S}$ en norme d'opérateur L^∞ en dimension 2

La matrice $M_{2,F}^{-1} M_{2,S}$ est une matrice diagonale dont les coefficients sont notés $\sigma_2(i,j)$, $1 \leq i,j \leq N-1$. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 5.3 *Soit τ défini au Théorème 3.1. Pour tout $N \geq 2$, pour tout $i,j \in \{1 \dots N-1\}$,*

$$\frac{3}{4}\tau^{-2} \leq \sigma_2(i,j) \leq \frac{3}{2}\tau^2. \tag{68}$$

Preuve : De la relation (61) et de l'inégalité (64), on obtient

$$\frac{3}{4}\sigma_i\sigma_j \leq \sigma_2(i,j) \leq \frac{3}{2}\sigma_i\sigma_j.$$

En utilisant le Théorème 3.1, on obtient l'équation (68). □

5.4 Equivalence de $M_{2,F}^{1/2}$ et $M_{2,S}^{1/2}$ en norme H^1 discrète en dimension 2

Enfin, généralisons la Proposition 4.1 de la section 4:

Théorème 5.4 *Soit la constante τ définie au Théorème 3.1 et C définie à la Proposition 4.1. Pour tout $N \geq 2$, et pour tout vecteur $U \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ on a les inégalités suivantes :*

$$\frac{3}{4C\tau} \leq \frac{\|M_{2,F}^{-1/2} M_{2,S}^{1/2} U\|_{\mathbb{H}_N^1}}{\|U\|_{\mathbb{H}_N^1}} \leq \frac{3C\tau}{2}.$$

Preuve :
On écrit $\|M_{2,F}^{-1/2} M_{2,S}^{1/2} U\|_{\mathbb{H}_N^1}$ sous la forme $U^* M_{2,S}^{1/2} M_{2,F}^{-1/2} K_{2,F} M_{2,F}^{-1/2} M_{2,S}^{1/2} U$.

On calcule tout d'abord $U^* M_{2,S}^{1/2} M_{2,F}^{-1/2} (M_{1,F} \otimes K_{1,F}) M_{2,F}^{-1/2} M_{2,S}^{1/2} U$, comme dans la preuve du Théorème 5.2 et on obtient

$$\begin{aligned} U^* M_{2,S}^{1/2} M_{2,F}^{-1/2} (M_{1,F} \otimes K_{1,F}) M_{2,F}^{-1/2} M_{2,S}^{1/2} U \\ &= \sum_{m,n,p,q} \sqrt{\sigma_2(m,n)\sigma_2(p,q)} U(m,n) M_{1,F}(m,p) K_{1,F}(n,q) U(p,q) \\ &= \sum_{m,n,q} \sqrt{\sigma_2(m,n)\sigma_2(m,q)} U(m,n) M_{1,F}(m,m) K_{1,F}(n,q) U(m,q). \end{aligned} \tag{69}$$

On applique alors l'inégalité (64) pour majorer le membre de droite de l'équation (69), ce qui donne

$$\begin{aligned} U^* M_{2,S}^{1/2} M_{2,F}^{-1/2} (M_{1,F} \otimes K_{1,F}) M_{2,F}^{-1/2} M_{2,S}^{1/2} U \\ &\leq \frac{3}{2} \sum_{m,n,q} \sigma_m \sqrt{\sigma_n \sigma_q} U(m,n) M_{1,F}(m,m) K_{1,F}(n,q) U(m,q) \\ &\leq \frac{3}{2} \sum_{m} \sigma_m M_{1,F}(m,m) U_m^* M_{1,S}^{1/2} M_{1,F}^{-1/2} K_{1,F} M_{1,F}^{-1/2} M_{1,S}^{1/2} U_m. \end{aligned}$$

On utilise le Théorème 3.1 et la Proposition 4.1 et on trouve

$$\begin{aligned} U^* M_{2,S}^{1/2} M_{2,F}^{-1/2} (M_{1,F} \otimes K_{1,F}) M_{2,F}^{-1/2} M_{2,S}^{1/2} U &\leq \frac{3\tau C}{3} \sum_m M_{1,F}(m,m) U_m^* K_{1,F} U_m \\ &\leq \frac{3\tau C}{2} U^* (M_{1,F} \otimes K_{1,F}) U. \end{aligned}$$

De même, on montre que

$$U^* M_{2,S}^{1/2} M_{2,F}^{-1/2} (K_{1,F} \otimes M_{1,F}) M_{2,F}^{-1/2} M_{2,S}^{1/2} U \leq \frac{3\tau C}{2} U^* (K_{1,F} \otimes M_{1,F}) U$$

et donc que

$$U^* M_{2,S}^{1/2} M_{2,F}^{-1/2} K_{2,F} M_{2,F}^{-1/2} M_{2,S}^{1/2} U \leq \frac{3\tau C}{2} U^* K_{2,F} U.$$

□

Références

[1] A. Averbuch, A. Cohen, et M. Israeli. A stable and accurate explicit scheme for parabolic evolution equations. `http://www.ann.jussieu.fr/∼ cohen/para.ps.gz`, 1998.

[2] Christine Bernardi et Yvon Maday. *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*. Springer-Verlag, Paris, 1992.

[3] Claudio Canuto et Alfio Quarteroni. Preconditioned minimal residual methods for Chebyshev spectral calculations. *J. Comput. Phys.*, 60(2):315–337, 1985.

[4] Piero de Mottoni et Michelle Schatzman. The Thual-Fauve pulse: Skew stabilization. Technical Report 304, Equipe d'Analyse Numérique de Lyon, 1999.

[5] M. Deville et E. Mund. Chebyshev pseudospectral solution of second-order elliptic equations with finite element preconditioning. *J. Comput. Phys.*, 60(3):517–533, 1985.

[6] M. O. Deville et E. H. Mund. Finite-element preconditioning for pseudospectral solutions of elliptic problems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 11(2):311–342, 1990.

[7] Luigi Gatteschi. Uniform approximation of Christoffel numbers for Jacobi weight. In *Numerical integration, III (Oberwolfach, 1987)*, volume 85 of *Internat. Schriftenreihe Numer. Math.*, pages 49–59. Birkhäuser, Basel, 1988.

[8] E. Hairer, S. P. Nørsett, et G. Wanner. *Solving ordinary differential equations. I*, volume 8 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1993. Nonstiff problems.

[9] P. Haldenwang, G. Labrosse, S. Abboudi, et M. Deville. Chebyshev 3-D spectral and 2-D pseudospectral solvers for the Helmholtz equation. *J. Comput. Phys.*, 55(1):115–128, 1984.

[10] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I.* Springer Study Edition. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990. Distribution theory and Fourier analysis.

[11] Steven A. Orszag. Spectral methods for problems in complex geometries. *J. Comput. Phys.*, 37(1):70–92, 1980.

[12] Seymour V. Parter. On the Legendre-Gauss-Lobatto points and weights. *J. Sci. Comput.*, 14(4):347–355, 1999.

[13] Seymour V. Parter. Preconditioning Legendre special collocation methods for elliptic problems. I. Finite difference operators. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(1):330–347 (electronic), 2001.

[14] Seymour V. Parter. Preconditioning Legendre spectral collocation methods for elliptic problems. II. Finite element operators. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(1):348–362 (electronic), 2001.

[15] Seymour V. Parter et Ernest E. Rothman. Preconditioning Legendre spectral collocation approximations to elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32(2):333–385, 1995.

[16] M. Ribot et M. Schatzman. Extrapolation of the Residual Smoothing Scheme. In preparation.

[17] M. Ribot et M. Schatzman. Asymptotic expansion of the zeroes of ultra-spherical polynomials and application to the preconditioning of spectral methods. Technical Report 359, Equipe d'Analyse Numérique de Lyon, 2002.

[18] Gábor Szegő. *Orthogonal polynomials.* American Mathematical Society, Providence, R.I., fourth edition, 1975. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII.