Suites et séries de fonctions
L2 MA/MP/MASE/MI

Feuille de TD n°1 : Rappels sur les suites, les séries, les équivalents et les développements limités

---

Exercice 1 : Suites

1. Etudier la convergence des suites suivantes :

$$u_n = \frac{n^5+n^3}{n^5+n^2+1},\ v_n = \frac{\sin n}{n^2},\ w_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1},\ x_n = \frac{n+\sqrt{3}}{n^2+4},\ y_n = n\sin(\frac{1}{n^2}),\ z_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Indication : Pour la suite (y_n), on pourra utiliser l'inégalité $|\sin\ x| \leq |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$ et le théorème des gendarmes.

2. Déterminer la limite de $n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

3. Etudier la convergence des suites suivantes en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$u_n = \frac{\alpha}{n},\ v_n = \frac{n\alpha}{\alpha^2+1},\ w_n = \alpha^n,\ x_n = \frac{n}{1+n\alpha}.$$

4. Calculer à l'aide de développements limités les limites des suites suivantes :

$$v_n = n\left(\sqrt{4+\frac{2}{n}} - \sqrt{4-\frac{3}{n^2}}\right),\ w_n = \sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt{n^2+3}.$$

Exercice 2 : Séries

1. **Premiers exemples.**

Etudier la nature des séries : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n,\ \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{4}\right)^n,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \arctan n,\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n},\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}},\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$.

2. **Divers.** Etudier la nature des séries de terme général : $u_n = \dfrac{n^3+2}{2n^3+1},\ v_n = \arcsin\dfrac{n^2}{n^2+2}$.

3. **Equivalents.** Etudier la nature des séries de terme général : $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$,

$$v_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n^3-4},\ w_n = \sin^3(\frac{1}{n}),\ x_n = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right),\ y_n = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{1}{n}\right),\ z_n = \frac{1}{n}\tan\left(\frac{1}{n}\right),\ a_n = \frac{1}{n^{1+1/n}}.$$

4. **Comparaisons avec inégalités et o.** Etudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = e^{-\sqrt{n}},\ v_n = \frac{1}{\ln n},\ w_n = \frac{\ln n}{n^2},\ x_n = \frac{\ln n}{n},\ y_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

5. **Règles de d'Alembert et de Cauchy.** Etudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}},\ v_n = \frac{n^3}{n!},\ w_n = \frac{(n+1)(n+2)...(2n)}{(2n)^n},\ x_n = \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n},\ y_n = \frac{1}{n!},\ z_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},$$

$$a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

6. **Développements limités.** Etudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \sin\left(1 - \cos\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)\right)\right),\ v_n = n\left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),\ w_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}} - \frac{n}{\sqrt{n+1}},$$

7. **Séries alternées.** Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{(-1)^n}{n}$. Etudier la nature des séries de terme général u_n et v_n.

8. **Développements limités et séries alternées.** Etude de la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, (on mettra $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ en facteur, puis on fera un développement limité).

Exercice 3 : Séries - un exercice

1. Montrer que $\left|\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + n^2}\right| \sim \dfrac{1}{n^2}$ quand $n \to +\infty$. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^2}$.

2. On cherche à étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n}$.

2.a. De l'équivalent $\left|\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + n}\right| \sim \dfrac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$, que peut-on en déduire sur la convergence asbolue de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n}$? Sur la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n}$?

2.b. Montrer que $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + n} = \dfrac{(-1)^n}{n} + v_n$ avec $v_n \sim -\dfrac{1}{n^2}$ quand $n \to +\infty$.

2.c. Déduire de la question 2.b. la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n}$.

Exercice 4 : Utiliser o et $\sim$

1. Déterminer un équivalent simple quand $x \to +\infty$ des expressions suivantes.

$$-5x^3 + \pi x^4 - \ln(2); 2e^x - \frac{1}{3}x^{12} + \sqrt{2}\ln(x);\ \ln(x+2); x^2 + 8x^2\ln(x) + \frac{2x}{\ln(x)};$$

$$e^{2x+3} - e^{2x} - 9; \frac{\ln(3 + x^4)}{\ln(3) + 2\ln(x^2)}; \frac{e^{x+1} + \ln(x)}{e^{x-1} + x + 1};$$

$$e^{2x} - 9e^{\sqrt{x}} - \ln(3x);\ \frac{\sin(x)}{x^3} - \frac{4}{x\sqrt{x}};\ \frac{2}{x^2\sqrt{x}} - \frac{\pi}{x} + \frac{12}{\ln(x)} - 5e^{-x}.$$

2. Donner un équivalent simple, quand $x \to 0$, de

$$\sin(x) - 3;\ \sin(x) - x + x^2;\ \sin(x) - x + \frac{x^3}{6};\ \cos(x) - 1;\ \cos(x) - e^x;\ \frac{\ln(3+x^4)}{\ln(3) + 2\ln(x^2)}.$$

3. En calculant un équivalent simple du numérateur et du dénominateur, déterminer les limites

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin(3x)};\ \lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)};\ \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{x^3};\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x} - \ln(e^2 - x)}{x^2};$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n} - 4n}{n^{100} - 4^{n+2}};\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - \sin(x^2)}{x\ln(x)};\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-2x}}.$$

4. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln(x)};\ \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x;\ \lim_{x\to+\infty} \big(x\ln(x) - x\ln(x+1)\big);\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\ln(x) + x\cos(x)}{\sqrt{x} + 2\sin(x^2)}.$$