Suites et séries de fonctions
L2 MA/MP/MASE/MI

Feuille de TD n°2 : Suites de fonctions

Exercice 1 : Convergences simples et uniformes.

1. Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2+1}$.

2. Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{nx}{x^2+1}$.

3.a. Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{n}{1+nx}$.

b. Etudier la convergence uniforme sur $]0,+\infty[$. Que peut-on dire du caractère borné de chaque fonction f_n et de la limite simple f sur $]0,+\infty[$?

4. Etudier la convergence simple, puis la convergence uniforme des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0,1]$.

5. Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{n+|x|}$. Etudier la convergence uniforme sur $[-R,R]$ avec $R>0$, puis sur $\mathbb{R}$.

6. Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$.

Exercice 2 : Convergences simples et uniformes.

Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.

2. En considérant les variations des fonctions f_n, étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ en fonction de α sur $\mathbb{R}^+$, sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $[a,+\infty[$ pour $a>0$.

Exercice 3 : Continuité.

1. Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n : x \mapsto \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}.$$

On note f la limite obtenue et D l'ensemble (que l'on précisera) sur lequel la convergence simple de $(f_n)_{n\geq 0}$ vers f a lieu.

2. Etudier la continuité de f_n et de f.

3. Que peut-on en déduire sur la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq 0}$ sur D ?

Exercice 4 : Dérivabilité.

1. Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$ [utiliser l'identité $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ pour $a, b > 0$.].

2. Que peut-on dire de la dérivabilité de chaque fonction f_n et de la limite simple f sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5 : Intégration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^2 e^{-nx^2}dx$. Calculer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 : Intégration.

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.

2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ et la limite de I_n lorsque $n \to +\infty$.

3. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 7 : Intégrale généralisée.

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}}{n + x^2}$.

1. Calculer la limite simple de la suite (f_n). La limite est-elle uniforme ?

2. Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f_n(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \int_{-A}^{A} f_n(t)dt$.

Exercice 8 : Suites de fonctions et convergence dominée.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/n}}{t^2+1}dt$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n}{nt^2 + e^t}dt$.

3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} (t^2+1)\frac{n+t}{n+t^2}e^{-t}dt$.

4.(*) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} (1 - \frac{t}{n})^n dt$.

5.(*) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|dt$ existe. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)dt = 0.$$

6. (*) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et bornée. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)dt = f(0)$.

Exercice 9 (**) : Convergence uniforme

Soit une suite de fonctions numériques $(f_n)_n$ et une fonction f définies sur $[0, 1]$, telles que $(f_n)_n$ converge vers f simplement sur $[0, 1]$ et uniformément sur $]0, 1[$.

Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Exercice 10 (**) : Polynômes et convergence uniforme Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

1. Montrer à l'aide de la définition de la convergence uniforme qu'il existe N tel que pour tout $n \geq N$, le polynôme $P_n - P_N$ est une constante a_n.

2. Montrer que a_n converge quand $n \to +\infty$.

3. En déduire que f est un polynôme.

Exercice 11 (****) : Théorème de Stone-Weierstrass

Le but de cet exercice est de montrer une des formes du théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

Soit f une fonction continue définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $n \geq 1$, on considère le polynôme (appelé polynôme de Bernstein) défini par $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1 - X)^{n-k}$.

On note f_0 la fonction constante 1 sur l'intervalle $[0, 1]$ et, pour i, la fonction f_i définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f_i(t) = t^i$.

1. Calculer $B_n(f_0)$.

2. a. Montrer que $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

b. En déduire $B_n(f_1)$, puis $B_n(f_2)$.

3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1 - x)^{n-k} = \frac{x(1 - x)}{n}$.

4. Soit $\alpha > 0$, $t \in [0, 1]$, $A_n = \{k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n, \left|\frac{k}{n} - t\right| \geq \alpha\}$. Montrer que $\sum_{k\in A_n} C_n^k t^k (1 - t)^{n-k} \leq \frac{1}{4\alpha n^2}$.

5. En déduire que $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

6. Déduire de la qestion 5 le théorème de Stone-Werierstrass énoncé au début de l'exercice.

Exercice 12 (****) : application du théorème de Stone-Weierstrass.

Soit f une fonction continue sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, telle que $\int_a^b t^n f(t)dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout polynôme $p \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_a^b p(t)f(t)dt = 0$.

2. En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(t)^2 dt = 0$, puis que f est la fonction nulle.