Suites et séries de fonctions
L2 MA/MP/MASE/MI

Feuille de TD n°3 : Séries de fonctions

Exercice 1 : Convergences simple et normale – Continuité et dérivabilité de séries de fonctions

1.1. Soit $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Soit $F(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$.

a. Etudier la convergence simple de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$.

b. Etudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

c. Parmi les trois convergences obtenues, laquelle suffit pour trouver le domaine de définition de F ? Même question pour la continuité.

1.2. Soit $g_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$ pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Soit $G(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n(x)$.

a. Etudier les convergences simple et normale de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$. Qu'en déduit-on pour le domaine de définition et la continuité de G ?

b. Etudier la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g'_n$ sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.3. Soit $h_n(x) = \sin\left(\dfrac{x^2+n^2}{n^4+1}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $H(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n(x)$.

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n(x)$ converge. Qu'en déduit-on ?

b. Etudier la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ sur $[-R, R]$ avec $R > 0$.

c. Montrer que H est dérivable sur $[-R, R]$ pour $R > 0$. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.4. Soit $k_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $k_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Soit $K(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} k_n(x)$.

a. Etudier la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} k_n$. Montrer que K est continue sur $[0, +\infty[$.

b. Etudier la convergence normale de $\sum_{n\in\mathbb{N}} k'_n$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Montrer que K est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2 : Convergences simple et normale – Continuité et dérivabilité de séries de fonctions

Soit f_n définie pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x)}$. Soit $F(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$.

2.1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.

2.2. Calculer f'_n et en déduire $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)|$. En déduire que F est continue sur $[0, +\infty[$.

2.3. Montrer que F est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En déduire que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 : Convergences simple et normale – Continuité et dérivabilité de séries de fonctions

Soit f_n définie pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$. Soit $F(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$.

3.1.a. Donner un équivalent simple de $\arctan(t)$ quand $t \to 0$. Etudier, pour $x \in \mathbb{R}^+$, la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$. La série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}^+$?

3.1.b. La série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^+$? Si $a > 0$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge-t-elle normalement sur $[0, a]$?

3.1.c. Que pouvez-vous conclure sur F au regard de la question 3.1.a. ? de la question 3.1.b. ?

3.2. Prouver que la série $\sum_{n\geq 1} f'_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. En vérifiant toutes les hypothèses du théorème utilisé, en déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4 : Convergences simple et normale – Continuité et dérivabilité de séries de fonctions

Soit f_n définie pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{n}\mathrm{e}^{-nx}$.

Soit $F(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{x}{n}\mathrm{e}^{-nx}$.

4.1. En séparant le cas $x = 0$, montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

4.2.a. Calculer f'_n et en déduire $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)|$ pour $n \geq 1$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

4.2.b. En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.

4.3.a. Calculer f_n'' et en déduire $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n'(x)|$ pour $n \geq 1$. La série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^+$?

4.3.b. Que vaut $\sup_{x\in[2,+\infty[} |f_n'(x)|$ pour $n \geq 1$?

4.3.c. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{2n-1}{n} \mathrm{e}^{-2n}$. En déduire la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ sur $[2, +\infty[$.

4.3.d. En déduire que F est dérivable sur $[2, +\infty[$.

Exercice 5 : Convergence uniforme et critère des séries alternées.

5.1.a. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

5.1.b. Etudier la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, puis pour $x \in [0, a]$ avec $a > 0$. Qu'en déduit-on à propos de la continuité de la fonction $F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$?

5.2.a. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

5.2.b. Rappeler le critère des séries alternées. En déduire une estimation du reste $R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{x}{k^2+x^2}$, puis la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6 : Convergence uniforme et critère des séries alternées.

Soit la série de fonctions $f(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$.

6.1. Montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^+$.

6.2. Montrer qu'elle est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, puis qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

6.3. Calculer f', puis f.

Exercice 7 : Convergence dominée.

On rappelle que pour $x \in]-1, 1[$, on a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$.

7.1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\, dt$ converge et calculer $\int_0^1 t^n \ln t \, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7.2. A l'aide du développement ci-dessus, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$.

Exercice 8 (**) : Convergence dominée.

On rappelle que $\text{th}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on admet que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ pour $x \in]-1,1]$.

8.1. Montrer que $\ln \text{th}x \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$ et $\ln \text{th}x \underset{x\to+\infty}{\sim} -2e^{-2x}$. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln \text{th}x\,dx$ converge.

8.2. A l'aide du développement ci-dessus, montrer que, pour $x > 0$, $\ln \text{th}x = -2\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{e^{-2(2n+1)x}}{2n+1}$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln \text{th}x\,dx = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 9 (**) : Exemple de série qui converge uniformément, et pas normalement

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \in [n, n+1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

9.1. Soit $x \in [1,+\infty[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge vers une limite $f(x)$ que l'on explicitera.

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie.

9.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1,+\infty[$, calculer $S_n(x) - f(x)$, où $S_n(x)$ est la n-ième somme partielle de la série de terme général $u_n(x)$.

9.3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$.

9.4. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ ne converge pas normalement sur $[1,+\infty[$.

Exercice 10 (****) : La fonction ζ de Riemann

On note $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

10.1. Montrer que ζ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$ avec $a > 1$, puis sur $]1,+\infty[$.

10.2. Montrer que $\dfrac{1}{(k+1)^x} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$ pour tout $k \geq 1$. En déduire que $\zeta(x) - 1 \leq \dfrac{1}{x-1} \leq \zeta(x)$.

10.3. Donner la limite de $\zeta(x)$ quand $x \to +\infty$ et un équivalent de $\zeta(x)$ quand $x \to 1^+$.

10.4. Déterminer l'ensemble de définition de α et montrer qu'elle y est continue et dérivable.