Suites et séries de fonctions
L2 MA/MP/MASE/MI

Feuille de TD n°4 : Séries entières

Exercice 1 : Rayons de convergence

Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\ g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n x^n(\text{où } a,b>0),\ h(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n^n\,x^n,\ i(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{n!}\,x^n,$$

$$j(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}\,x^n,\ k(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^2+4n-1}{n+4}.\frac{1}{n!}\,x^n,\ l(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}7^nx^{3n}.$$

Exercice 2 : Rayons de convergence

Soit deux séries entières $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ de rayon R_a et $\sum_{n\geq 0}b_nx^n$ de rayon R_b.

1. On suppose que $R_a\neq R_b$. Montrer que la somme $\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)x^n$ est une série entière de rayon $\min(R_a,R_b)$.

2. On suppose que $|a_n|\leq|b_n|$. Montrer que $R_a\geq R_b$.

Exercice 3 : Somme de séries entières

Déterminer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-x)^n,\ g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^nx^n,\ h(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\,x^{n-1},\ i(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\,x^n,\ j(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\,x^n.$$

Exercice 4 : Continuité des séries entières

Donner l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la fonction suivante est bien définie

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}.$$

Est-elle continue sur son ensemble de définition ?

Exercice 5 : Continuité des séries entières. Développement de $\ln(1+x)$

1. Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n\geq 0}(-1)^nx^n$. Que vaut cette série sur son ensemble de définition ?

2. En déduire un développement en série entière de $\ln(1+x)$ sur $]-1,1[$.

3. En utilisant la continuité, montrer que $\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ sur $]-1,1]$.

Exercice 6 : Dérivation de séries entières. Calcul de somme

1. Calculer le rayon de convergence de la série $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. Sur quel ensemble est-elle continue ?

2. La dériver deux fois. Que vaut f'' ?

3. En déduire une expression de f à l'aide du ln.

4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

Exercice 7 : Intégration d'une série entière

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et son rayon. Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{x^3}{2+x}$ sous la forme $\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+3}$ et préciser son rayon.

2. Trouver les coefficients α, β et γ tels que $\frac{x^3}{x+2} = x^2 + \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x+2}$.

3. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{t^3}{t+2}\, dt$.

4. Intégrer l'égalité de la question 1. sur $[0,1]$, en citant soigneusement le théorème utilisé . En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+4)2^{n+1}}$.

Exercice 8 : Développements en séries entières

1. Rappeler le développement en série entière au voisinage de $x = 0$ des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{1+x},\ x \mapsto \cos x,\ x \mapsto e^x,\ x \mapsto (1+x)^\alpha.$$

2. En déduire les développements en série entière au voisinage de $x = 0$ de :

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2},\ x \mapsto \ \mathrm{arctan} x.$$

3. Développer en série entière au voisinage de $x = 0$ les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2+x},\ g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Exercice 9 : Développements en séries entières par résolution d'équation différentielle.

A l'aide d'une équation différentielle, montrer que $(1+x)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé est développable en série entière autour de 0 et donner le domaine de validité de la formule obtenue.

Exercice 10 : Développements en séries entières et contre-exemple

Soit $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$. On veut montrer que f n'est pas développable en série entière autour de 0.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. Montrer qur f est prolongeable par continuité en 0, que f est dérivable en 0 et que f' est prolongeable par continuité en 0.

3. Montrer que $f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{3k}} \exp(-\frac{1}{x^2})$ pour tout $k \geq 1$ et en déduire $f^{(k)}(0)$ pour tout $k \geq 1$.

4. Conclure.

Exercice 11 : Application des séries entières. Prolongement $\mathcal{C}^\infty$ d'une fonction

On considère la fonction $f : x \to \frac{\ln x}{x-1}$.

1. Donner son ensemble de définition. Peut-elle être prolongée par continuité ?

2. Développer en série entière la fonction $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ et donner son rayon de convergence. En déduire que g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

3. En déduire que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 12 : Application des séries entières. Résolution d'équation différentielle.

On se donne l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]\,0,+\infty[$:

$$(x^2+x)\,y'' + (3\,x+1)\,y' + y = 0\ .$$

On cherche une solution de cette équation qui soit développable en série entière. On suppose que cette solution est de la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur l'intervalle de convergence $]-R,R\,[$.

1. Trouver une relation simple entre a_n et a_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire que $a_n = (-1)^n a_0$ et une expression simple de y (c'est-à-dire que l'on donnera la valeur de la somme de la série entière obtenue).

Exercice 13 : Application des séries entières. Dénombrement

On appelle S_n le nombre de couples $(n_1,n_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tels que $n = n_1 + 2n_2$. (C'est le "problème du changement de monnaie").

1. Montrer que le produit $\sum_{n_1\geq 0} x^{n_1} \times \sum_{n_2\geq 0} x^{2n_2}$ est une série entière égale à $\sum_{n\geq 0} S_n x^n$.

2. Donner une expression des séries $\sum_{n_1\geq 0} x^{n_1}$ et $\sum_{n_2\geq 0} x^{2n_2}$, puis une expression du produit

$\sum_{n_1 \geq 0} x^{n_1} \times \sum_{n_2 \geq 0} x^{2n_2}$.

3. Trouver des réels a, b, c tels que : $\dfrac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{(1-x)^2} + \dfrac{c}{1+x}$.

4. Déduire de la question 3. un développement en série entière de la fonction $\dfrac{1}{(1-x)^2(1+x)}$. Quel est le rayon de cette série ?

5. Déduire des questions précédentes une expression pour S_n. Vérifier qu'elle est exacte pour $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Exercice 14 (**) : Application des séries entières. Dénombrement

Soit I_n le nombre d'involutions de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$, c'est-à-dire le nombre de bijections σ de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$ telles que $\sigma o \sigma = id$.

1. Calculer I_1, I_2, et I_3.

2. Montrer que $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$ pour $n \geq 1$.

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n \geq 1} \dfrac{I_n}{n!} x^n$.

3. Montrer que $\dfrac{I_n}{n!} \leq 1$. En déduire que le rayon de la série entière est plus grand que 1.

4.Montrer que f satisfait l'équation différentielle

$$f'(x) = (1+x)f(x) + 1 + x$$

et que cette équation admet pour solutions $f(x) = C\exp(x + \dfrac{x^2}{2}) - 1$.

5. En déduire le rayon de convergence de la série f et retrouver les valeurs de I_1, I_2 et I_3.

Exercice 15 (**) : Application des séries entières. Dénombrement

On note c_n le nombre de parenthésages possibles avec n paires de parenthèses.

1. Déterminer c_n pour $n = 1, 2$ et 3. On note $c_0 = 1$.

2. Montrer (ou admettre !) que $c_n = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} c_{n-k}$.

On note $f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$, série entière de rayon R.

3. Montrer que $c_n \leq 2^{2n}$ et donc que $R \geq 1/4$.

4. Montrer que f vérifie $xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$. En déduire que $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$.

5. Développer f en série entière et donner une valeur pour R. Déterminer une valeur pour c_n, appelés nombres de Catalan.