Suites et séries de fonctions
L2 MA/MP/MASE/MI

Feuille de TD n°5 : Séries trigonométriques et séries de Fourier

---

Exercice 1 : Séries trigonométriques

On considère la série trigonométrique de terme général $u_n(x) = \dfrac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3}$.

1. Montrer que cette série trigonométrique est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la somme $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de cette série est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée s' sous forme de série trigonométrique.

3. Déterminer une primitive de s sous forme de série trigonométrique.

Exercice 2 : Calcul de séries de Fourier

Calculer les séries de Fourier associées aux fonctions 2π périodiques suivantes :

1. $f(x) = \pi - x$ pour $0 < x \leq \pi$ et f impaire.

2. $g(x) = \pi - x$ pour $0 \leq x \leq \pi$ et g paire.

Exercice 3 : Séries de Fourier : Théorème de Dirichlet et égalité de Parseval

Soit f la fonction de période 2π, égale à $\dfrac{\pi - x}{2}$ sur $]0, 2\pi]$.

1. Calculer la série de Fourier de f.

2. Montrer l'égalité suivante : $\dfrac{\pi - x}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, en précisant pour quelles valeurs de x cette égalité est vraie.

3. Déduire de la question 1. la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 4 : Séries de Fourier : Théorème de Dirichlet et égalité de Parseval

Soit f la fonction paire, de période 2π, égale à $(\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.

2. Montrer que la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer également $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 5 : Séries de Fourier : Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π- périodique, **paire**, telle que : $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } t = \dfrac{\pi}{2}, \\ -1 & \text{si } \dfrac{\pi}{2} < t \leq \pi \ . \end{cases}$

1. Dessiner cette fonction sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f.

3. Pourquoi la série de Fourier de f converge-t-elle et combien vaut sa somme ? (On rappellera l'énoncé du théorème utilisé.)

4. En déduire la somme de la série : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

Exercice 6 : Séries de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, et telle que $f(t) = \pi^2 - t^2$ pour $t \in]-\pi, \pi]$.

1. Dessiner cette fonction sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire la série de Fourier de f.

3. Pourquoi la série de Fourier de f converge-t-elle ? Donner la valeur de sa somme (on rappellera l'énoncé du théorème utilisé).

4. En déduire les sommes des séries suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 7 (*) : Séries de Fourier

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique telle que $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

1. Développer la fonction f en série de Fourier.

2. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \quad \text{et} \quad \pi \text{cotan}(\pi\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n\geq 1} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

Exercice 8 (*) : Séries de Fourier (suite de l'exercice 7)

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique telle que $g(x) = \sin(\alpha x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

1. Déterminer la série de Fourier de g.

2. A partir des séries de Fourier de f et de g, expliciter la série de Fourier (complexe) de la fonction h de période 2π, définie sur $\mathbb{R}$, égale à $h(x) = \exp(i\alpha x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

3. En déduire l'identité :

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha - n)^2}.$$

Exercice 9 (*) : Régularité et séries de Fourier

Soit f une fonction 2π-périodique, appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On note $a_n(f)$ et $b_n(f)$ (resp. $a_n(f')$ et $b_n(f')$) les coefficients de Fourier de f (resp. les coefficients de Fourier de f').

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \geq 1$,

$$a_n(f) = -\frac{1}{n} b_n(f'), \qquad b_n(f) = \frac{1}{n} a_n(f').$$

2. On note $a_n(f'')$ et $b_n(f'')$ les coefficients de Fourier de f''. Déterminer une formule entre $a_n(f)$ et $a_n(f'')$ et une formule entre $b_n(f)$ et $b_n(f'')$ pour $n \geq 1$.

3. On rappelle que si g est une fonction continue et 2π-périodique, alors la fonction g est bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante M_g telle que $|g(t)| \leq M_g$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que $|a_n(f'')| \leq 2M_{f''}$ et $|b_n(f'')| \leq 2M_{f''}$ pour tout $n \geq 1$.

b. En déduire que pour $n \geq 1$,

$$|a_n(f)| \leq \frac{2M_{f''}}{n^2}, \qquad |b_n(f)| \leq \frac{2M_{f''}}{n^2}.$$

c. En déduire que la série de Fourier $S(f)(x)$ converge normalement et uniformément sur $\mathbb{R}$.

4. Généraliser la majoration des coefficients de Fourier ci-dessus au cas d'une fonction f, 2π-périodique et appartenant à $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$.

Exercice 10 (***) : Démonstration du théorème de Dirichlet

On chercher à démontrer le théorème de Dirichlet, à savoir : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on suppose que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^+)}{h} \text{ et } \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^-)}{h} \text{ existent.}$$

Alors la série de Fourier de f converge en x_0 et a pour somme :

$$S(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^+) + f(x_0^-)\right).$$

On a besoin de plusieurs résultats intermédiaires :

A. **Lemme de Riemann-Lebesgue :** Montrer que pour une fonction f constante par morceaux sur $[a, b]$, $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0$. Généraliser ce résultat au cas d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

B. **Noyau de Dirichlet**. On pose $D_n(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

1. Montrer que D_n est 2π-périodique, paire et que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1$.

2. Montrer que $D_n(x) = \dfrac{2n+1}{2\pi}$ si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $D_n(x) = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$ sinon.

3. Montrer que $S_n(f)(x_0) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx_0} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x_0) D_n(t)dt$.

C. **Conclusion**.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)D_n(t)dt - \frac{f(0^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t)-f(0^+)}{t} \frac{t}{\sin(t/2)} \sin((n+1/2)t)dt$ et montrer que cette expression tend vers 0.

Montrer de même que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{0} f(t)D_n(t)dt = \frac{f(0^-)}{2}$. Conclure dans le cas où $x_0 = 0$.

2. Généraliser au cas x_0 quelconque.