Suites et séries de fonctions
L2 MA/MP/MASE/MI

Feuille de TD : Révisions

Exercice 1 : Suites de fonctions (examen 2015)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les fonctions continues définies par

$$\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [n-1, n+1], \\ 1 & \text{si } x = n, \\ \text{affine} & \text{si } x \in]n-1, n[\cup]n, n+1[\end{cases} \end{array}$$

1. Tracer sommairement une fonction f_n.

2. Montrer la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer.

3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$? (Justifier)

Exercice 2 : Séries de fonctions (rattrapage 2015)

Soit la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \dfrac{1}{n + n^3x^2}$, $n > 0$ et $x \in]0, +\infty[$.

Étudier la convergence simple de la série de fonctions sur $]0, +\infty[$, puis la convergence normale sur $]0, +\infty[$ et sur $[a, +\infty[$, pour $a > 0$.

Exercice 3 : Séries de fonctions et convergence dominée ; série de Fourier (épreuve de l'agregation de mathématiques 2016)

1. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t+1} dt = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que

$$f(t) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{t^2}{4}, \text{ pour } t \in]-\pi, \pi].$$

(a) Déterminer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.

(b) En déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t+1} dt = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 4 : Séries entières (examen 2015)

On considère l'équation différentielle suivante, d'inconnue y, fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$y'' + y = -2\sin x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{1}$$

On cherche une solution de (1) sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Montrer que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, puis établir les relations de récurrence pour $p \geq 0$

$$(2p+2)(2p+1)a_{2p+2} + a_{2p} = 0, \qquad (2p+3)(2p+2)a_{2p+3} + a_{2p+1} = -2\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}.$$

2. En déduire que pour tout $p \geq 1$, $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}$. Identifier la fonction ainsi obtenue.

Exercice 5 : Séries entières

1. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0}(n^2 - n)x^n$.

2. Obtenir le développement en série entière autour de 0 de $\int_0^x \mathrm{ch}(t^2)dt$.

(Rappel : $\mathrm{ch}t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$)

Exercice 6 : Séries de Fourier (examen 2015)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \max(0, \sin x)$ sur $[0, 2\pi]$, prolongée par 2π-périodicité sur $\mathbb{R}$.

1.Tracer sommairement le graphe de f sur $[-2\pi, 4\pi]$.

2. Développer f en série de Fourier.

3. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

4. En déduire que

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

5. Démontrer l'égalité précédente sans utiliser la série de Fourier.