Algèbres de Hecke carquois et algèbres de Iwahori–Hecke généralisées

Salim Rostam

19 novembre 2018

Sommaire

Groupes de réflexions complexes

Définition

- Une *réflexion complexe* est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, différent de l'identité, fixant un hyperplan et d'ordre fini.
- Un *groupe de réflexions complexe* est un groupe fini engendré par des réflexions complexes.

Théorème (Shephard–Todd 1954)

Les groupes de réflexions complexes irréductibles sont divisés en deux grandes familles :

- *une famille infinie* $\{G(r,p,n)\}$ *avec* $p \mid r$ *;*
- *34 exceptions.*

Groupes de réflexions complexes

Définition

- Une *réflexion complexe* est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, différent de l'identité, fixant un hyperplan et d'ordre fini.
- Un *groupe de réflexions complexe* est un groupe fini engendré par des réflexions complexes.

Théorème (Shephard–Todd 1954)

Les groupes de réflexions complexes irréductibles sont divisés en deux grandes familles :

- *une famille infinie* $\{G(r,p,n)\}$ *avec* $p \mid r$ *;*
- *34 exceptions.*

On retrouve les types de Coxeter finis, notamment :

- le type A_n avec $G(1,1,n)$;
- le type B_n avec $G(2,1,n)$;
- le type D_n avec $G(2,2,n)$;
- le type diédral $I_2(n)$ avec $G(n,n,2)$.

Algèbres de Hecke carquois

Les *carquois* que l'on considère sont des graphes orientés sans boucle avec flèches multiples autorisées. Soit Γ un carquois d'ensemble de sommets K. Soient F un corps et $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition (Khovanov–Lauda, Rouquier, 2009)

L'*algèbre de Hecke carquois* $\mathrm{R}_n(\Gamma)$ est la F-algèbre associative de générateurs

$$y_1, \dots, y_n, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \qquad \text{et } e(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k} \in K^n,$$

soumis à diverses relations.

Algèbres de Hecke carquois

Les *carquois* que l'on considère sont des graphes orientés sans boucle avec flèches multiples autorisées. Soit Γ un carquois d'ensemble de sommets K. Soient F un corps et $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition (Khovanov–Lauda, Rouquier, 2009)

L'*algèbre de Hecke carquois* $\mathrm{R}_n(\Gamma)$ est la F-algèbre associative de générateurs

$$y_1, \dots, y_n, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \qquad \text{et } e(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k} \in K^n,$$

soumis à diverses relations.

Proposition (Khovanov–Lauda, Rouquier)

- *On peut munir* $\mathrm{R}_n(\Gamma)$ *d'une* $\mathbb{Z}$*-graduation en posant*

$$\deg e(\boldsymbol{k}) := 0, \quad \deg y_b := 2, \quad \deg \psi_a e(\boldsymbol{k}) := -c(k_a, k_{a+1}).$$

- *La famille*

$$\left\{y_1^{a_1} \cdots y_n^{a_n} \psi_w e(\boldsymbol{k}) : a_i \in \mathbb{N}, w \in \mathfrak{S}_n, \boldsymbol{k} \in K^n\right\},$$

est une base de $\mathrm{R}_n(\Gamma)$.

Algèbres de Hecke carquois cyclotomiques

Soit $\Lambda = (\Lambda_k) \in \mathbb{N}^{(K)}$.

Définition (Khovanov–Lauda, Rouquier)

L'algèbre de Hecke carquois *cyclotomique* $\mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma)$ est le quotient de $\mathrm{R}_n(\Gamma)$ par les relations

$$y_1^{\Lambda_{k_1}} e(\boldsymbol{k}) = 0,$$

pour tout $\boldsymbol{k} \in K^n$.

Proposition

L'algèbre $\mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma)$ hérite de la $\mathbb{Z}$-graduation de $\mathrm{R}_n(\Gamma)$.

Contrairement au cas de $\mathrm{R}_n(\Gamma)$, on sait pas en général donner de base de $\mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma)$.

Automorphisme provenant du carquois

Soit σ une permutation d'ordre fini des sommets K de Γ vérifiant, pour tout $k, k' \in K$,

$$d(\sigma(k), \sigma(k')) = d(k, k'),$$
$$\Lambda_{\sigma(k)} = \Lambda_k.$$

Proposition (R.)

La permutation σ s'étend en un automorphisme homogène de l'algèbre $\mathrm{R}_n(\Gamma)$, et passe au quotient $\mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma)$, via

$$\sigma(y_b) := y_b,$$
$$\sigma(\psi_a) := \psi_a,$$
$$\sigma(e(\boldsymbol{k})) := e(\sigma(\boldsymbol{k})), \quad \textit{pour tout } \boldsymbol{k} \in K^n.$$

Automorphisme provenant du carquois

Soit σ une permutation d'ordre fini des sommets K de Γ vérifiant, pour tout $k, k' \in K$,

$$d(\sigma(k), \sigma(k')) = d(k, k'),$$
$$\Lambda_{\sigma(k)} = \Lambda_k.$$

Proposition (R.)

La permutation σ s'étend en un automorphisme homogène de l'algèbre $\mathrm{R}_n(\Gamma)$, et passe au quotient $\mathrm{R}_n^{\Lambda}(\Gamma)$, via

$$\sigma(y_b) \coloneqq y_b,$$
$$\sigma(\psi_a) \coloneqq \psi_a,$$
$$\sigma(e(\boldsymbol{k})) \coloneqq e(\sigma(\boldsymbol{k})), \quad \textit{pour tout } \boldsymbol{k} \in K^n.$$

Pour $\kappa \in K^n/\langle\sigma\rangle$, on pose $e(\kappa) \coloneqq \sum_{\boldsymbol{k}\in\kappa} e(\boldsymbol{k}) \in \mathrm{R}_n(\Gamma)$.

Proposition (R.)

La famille $\{y_1^{a_1} \cdots y_n^{a_n} \psi_w e(\kappa) : a_i \in \mathbb{N}, w \in \mathfrak{S}_n, \kappa \in K^n/\langle\sigma\rangle\}$ est une base de la sous-algèbre $\mathrm{R}_n(\Gamma)^\sigma \subseteq \mathrm{R}_n(\Gamma)$ des points fixes.

Sous-algèbre fixée

Théorème (R.)

La sous-algèbre $\mathrm{R}_n^{\Lambda}(\Gamma)^{\sigma} \subseteq \mathrm{R}_n^{\Lambda}(\Gamma)$ des points fixes est isomorphe à la F-algèbre associative de générateurs

$$y_1, \dots, y_n, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \qquad \text{et } e(\kappa), \kappa \in K^n/\langle\sigma\rangle,$$

soumis à des relations similaires à celles de $\mathrm{R}_n^{\Lambda}(\Gamma)$, notamment

$$\begin{aligned}
e(\kappa)e(\kappa') &= \delta_{\kappa,\kappa'} e(\kappa),\\
\psi_a y_{a+1} e(\kappa) &= (y_a \psi_a + \delta_{\kappa_a,\kappa_{a+1}}) e(\kappa),\\
\psi_a^2 e(\kappa) &= \delta_{\kappa_a \neq \kappa_{a+1}} (-1)^{d(\kappa_a,\kappa_{a+1})} (y_{a+1} - y_a)^{-c(\kappa_a,\kappa_{a+1})} e(\kappa),\\
y_1^{\Lambda_{\kappa_1}} e(\kappa) &= 0.
\end{aligned}$$

La graduation sur $\mathrm{R}_n^{\Lambda}(\Gamma)^{\sigma}$ est donnée par

$$\deg e(\kappa) = 0, \qquad \deg y_b = 2, \qquad \deg \psi_a e(\kappa) = -c(\kappa_a, \kappa_{a+1}).$$

Remarque

Les quantités $\delta_{\kappa_a \neq \kappa_{a+1}}$, $d(\kappa_a, \kappa_{a+1})$ et Λ_{κ_a} sont bien définies.

Idée de la preuve

On prouve d'abord le théorème pour $\mathrm{R}_n(\Gamma)^\sigma$ en utilisant la base obtenue précédemment. On note ensuite

$$\mathcal{I} := \left\langle y_1^{\Lambda_{k_1}} e(\boldsymbol{k}) : \boldsymbol{k} \in K^n \right\rangle \subseteq \mathrm{R}_n(\Gamma),$$

$$\mathcal{I}_\sigma := \left\langle y_1^{\Lambda_{\kappa_1}} e(\kappa) : \kappa \in K^n / \langle \sigma \rangle \right\rangle \subseteq \mathrm{R}_n(\Gamma)^\sigma,$$

les idéaux des relations cyclotomiques. L'isomorphisme découle alors de l'égalité

$$\mathcal{I}_\sigma = \mathcal{I} \cap \mathrm{R}_n(\Gamma)^\sigma, \tag{$*$}$$

que l'on montre en se servant de l'orthogonalité des idempotents.

Idée de la preuve

On prouve d'abord le théorème pour $\mathrm{R}_n(\Gamma)^\sigma$ en utilisant la base obtenue précédemment. On note ensuite

$$\mathcal{I} := \left\langle y_1^{\Lambda_{k_1}} e(\boldsymbol{k}) : \boldsymbol{k} \in K^n \right\rangle \subseteq \mathrm{R}_n(\Gamma),$$
$$\mathcal{I}_\sigma := \left\langle y_1^{\Lambda_{\kappa_1}} e(\kappa) : \kappa \in K^n/\langle\sigma\rangle \right\rangle \subseteq \mathrm{R}_n(\Gamma)^\sigma,$$

les idéaux des relations cyclotomiques. L'isomorphisme découle alors de l'égalité

$$\mathcal{I}_\sigma = \mathcal{I} \cap \mathrm{R}_n(\Gamma)^\sigma, \qquad (*)$$

que l'on montre en se servant de l'orthogonalité des idempotents.

Remarque

Si l'ordre p de σ est inversible dans F, l'égalité $(*)$ peut être obtenue en utilisant la projection

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma) & \to & \mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma)^\sigma \\ x & \mapsto & \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} \sigma^j(x) \end{array}$$

Algèbres d'Ariki–Koike

Soient $q \in F^\times \setminus \{1\}$ et $e \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ son ordre. On définit

$$I := \begin{cases} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}, & \text{if } e < \infty, \\ \mathbb{Z}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $J := \{1, \ldots, d\}$. Soient $\boldsymbol{u} \in (F^\times)^d$ et $\Lambda \in \mathbb{N}^{(I \times J)}$.

Définition (Broué–Malle 1993, Ariki–Koike 1994)

L'*algèbre d'Ariki–Koike* $\mathrm{H}_n^\Lambda(q, \boldsymbol{u})$ est la F-algèbre unitaire associative de générateurs

$$S, T_1, \ldots, T_{n-1},$$

soumis aux relations de tresse de type B_n ainsi qu'à

$$T_a^2 = (q-1)T_a + q,$$

$$\prod_{i,j} (S - q^i u_j)^{\Lambda_{ij}} = 0.$$

C'est une algèbre de Hecke de type $G(r, 1, n)$, où $r := \sum_{i,j} \Lambda_{ij}$.

Isomorphisme de Brundan–Kleshchev

On suppose que $u_j/u_{j'} \notin \langle q \rangle$ pour tout $j \neq j'$.

Théorème (Brundan–Kleshchev, Rouquier, 2009)

On a une famille d'isomorphisme de F-algèbres

$$\mathrm{H}_n^{\Lambda}(q, \boldsymbol{u}) \simeq \mathrm{R}_n^{\Lambda}(\Gamma_{e,d}).$$

Isomorphisme de Brundan–Kleshchev

On suppose que $u_j/u_{j'} \notin \langle q \rangle$ pour tout $j \neq j'$.

Théorème (Brundan–Kleshchev, Rouquier, 2009)

On a une famille d'isomorphisme de F-algèbres

$$\mathrm{H}_n^\Lambda(q, \boldsymbol{u}) \simeq \mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma_{e,d}).$$

Corollaire

L'algèbre $\mathrm{H}_n^\Lambda(q, \boldsymbol{u})$ hérite de la $\mathbb{Z}$-graduation de $\mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma_{e,d})$.

Corollaire

Si $q' \in F^\times$ a le même ordre e que q alors $\mathrm{H}_n^\Lambda(q', \boldsymbol{u}) \simeq \mathrm{H}_n^\Lambda(q, \boldsymbol{u})$.

Une équivalence de Morita

Théorème (Dipper–Mathas 2002)

L'algèbre $\mathrm{H}_n^\Lambda(q, \boldsymbol{u})$ *est Morita-équivalente à*

$$\bigoplus_{\lambda_1+\cdots+\lambda_d=n} \left[\mathrm{H}_{\lambda_1}^{\Lambda^1}(q,1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{H}_{\lambda_d}^{\Lambda^d}(q,1)\right],$$

où Λ^j *désigne la restriction de* Λ *à* $I \times \{j\}$*.*

Preuve version Hecke carquois

On a un isomorphisme en termes d'algèbres de Hecke carquois

$$\mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma) \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^J \\ \lambda_1+\cdots+\lambda_d=n}} \mathrm{Mat}_{m_\lambda}\left[\mathrm{R}_{\lambda_1}^{\Lambda^1}(\Gamma^1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{R}_{\lambda_d}^{\Lambda^d}(\Gamma^d)\right],$$

où $\Gamma = \amalg_{j\in J}\Gamma^j$ est une réunion disjointe de carquois et Λ^j est la restriction de $\Lambda \in \mathbb{N}^{(K)}$ aux sommets de Γ^j. On conclut en prenant $\Gamma = \Gamma_{e,d}$ et en utilisant l'isomorphisme de Brundan–Kleshchev.

Algèbres de Yokonuma–Hecke cyclotomiques

Soit $\Lambda = (\Lambda_i) \in \mathbb{N}^{(I)}$. On suppose que d est inversible dans F.

Définition (Yokonuma 1967, Juyumaya, Juyumaya–Kannan, Chlouveraki–Poulain d'Andecy)

L'*algèbre de Yokonuma–Hecke cyclotomique* $\mathrm{Y}_{d,n}^{\Lambda}(q)$ est la F-algèbre définie par :

- des générateurs $S, T_1, \ldots, T_{n-1}$, soumis aux relations de tresse de type B_n ;
- des générateurs $t_1, \ldots, t_n$ de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n$;

tels que, avec $e_a := \frac{1}{d}\sum_{j=0}^{d-1} t_a^j t_{a+1}^{d-j}$,

$$T_a^2 = (q-1)T_a e_a + q, \qquad t_b T_a = T_a t_{s_a(b)},$$

$$\prod_{i \in I} (S - q^i)^{\Lambda_i} = 0, \qquad S t_b = t_b S.$$

On a $\mathrm{Y}_{1,n}^{\Lambda}(q) \simeq \mathrm{H}_n^{\Lambda}(q, 1)$.

Carquois associé

Théorème (R.)

On prolonge $\Lambda = (\Lambda_i) \in \mathbb{N}^{(I)}$ *à* $I \times J$ *en posant* $\Lambda_{i,j} := \Lambda_i$*. On a un isomorphisme de* F*-algèbres*

$$\mathrm{Y}^{\Lambda}_{d,n}(q) \simeq \mathrm{R}^{\Lambda}_{n}(\Gamma_{e,d}).$$

Idée de la preuve

Les t_a sont co-diagonalisables. Sur les sous-espaces propres communs, les idempotents $e_a \in F[t_a, t_{a+1}]$ valent 0 ou 1.

- Si $e_a = 1$ alors $T_a^2 = (q-1)T_a + q$ et on reprend la preuve de Brundan–Kleshchev pour l'algèbre $\mathrm{H}^{\Lambda}_{n}(q, 1)$.
- Si $e_a = 0$ alors $T_a^2 = q$ et les calculs sont aisés.

Carquois associé

Théorème (R.)

On prolonge $\Lambda = (\Lambda_i) \in \mathbb{N}^{(I)}$ *à* $I \times J$ *en posant* $\Lambda_{i,j} := \Lambda_i$. *On a un isomorphisme de* F*-algèbres*

$$\mathrm{Y}^{\Lambda}_{d,n}(q) \simeq \mathrm{R}^{\Lambda}_{n}(\Gamma_{e,d}).$$

Idée de la preuve

Les t_a sont co-diagonalisables. Sur les sous-espaces propres communs, les idempotents $e_a \in F[t_a, t_{a+1}]$ valent 0 ou 1.

- Si $e_a = 1$ alors $T_a^2 = (q-1)T_a + q$ et on reprend la preuve de Brundan–Kleshchev pour l'algèbre $\mathrm{H}^{\Lambda}_{n}(q,1)$.
- Si $e_a = 0$ alors $T_a^2 = q$ et les calculs sont aisés.

On retrouve alors une version faible d'un isomorphisme prouvé par Lusztig et Jacon–Poulain d'Andecy :

$$\mathrm{Y}^{\Lambda}_{d,n}(q) \simeq \bigoplus_{\lambda_1+\cdots+\lambda_d=n} \mathrm{Mat}_{m_\lambda}\left[\mathrm{H}^{\Lambda}_{\lambda_1}(q,1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{H}^{\Lambda}_{\lambda_d}(q,1)\right].$$

Comme sous-algèbre d'Ariki–Koike

On suppose que le corps F possède une racine primitive p-ième de l'unité ζ. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $\zeta^d \in \langle q \rangle$ et soit $\eta \in I$ l'unique élément tel que $q^\eta = \zeta^d$. Finalement, on définit $\boldsymbol{u}_\zeta := (1, \zeta, \dots, \zeta^{d-1})$.

Proposition

On suppose que $\Lambda_{ij} =: \Lambda_i$ ne dépend pas de j et que $\Lambda_i = \Lambda_{i+\eta}$ pour tout $i \in I$. Il existe un automorphisme d'algèbre σ de $\mathrm{H}_n^\Lambda(q, \boldsymbol{u}_\zeta)$ donné par

$$\sigma(T_a) = T_a,$$
$$\sigma(S) = \zeta S.$$

Comme sous-algèbre d'Ariki–Koike

On suppose que le corps F possède une racine primitive p-ième de l'unité ζ. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $\zeta^d \in \langle q \rangle$ et soit $\eta \in I$ l'unique élément tel que $q^\eta = \zeta^d$. Finalement, on définit $\boldsymbol{u}_\zeta := (1, \zeta, \ldots, \zeta^{d-1})$.

Proposition

On suppose que $\Lambda_{ij} =: \Lambda_i$ ne dépend pas de j et que $\Lambda_i = \Lambda_{i+\eta}$ pour tout $i \in I$. Il existe un automorphisme d'algèbre σ de $\mathrm{H}_n^\Lambda(q, \boldsymbol{u}_\zeta)$ donné par

$$\sigma(T_a) = T_a,$$
$$\sigma(S) = \zeta S.$$

Proposition

La sous-algèbre des points fixes $\mathrm{H}_{p,n}^\Lambda(q) := \mathrm{H}_n^\Lambda(q, \boldsymbol{u}_\zeta)^\sigma$ est une algèbre de Hecke de type $G(r, p, n)$.

Comme pour $\mathrm{H}_n^\Lambda(q, \boldsymbol{u})$, on peut donner une présentation de $\mathrm{H}_{p,n}^\Lambda(q)$.

Comme sous-algèbre de Hecke carquois cyclotomique

Proposition (R.)

On peut choisir l'isomorphisme $\mathrm{H}_n^\Lambda(q, \boldsymbol{u}_\zeta) \simeq \mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma_{e,d})$ *tel que* σ *devienne l'automorphisme homogène de* $\mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma_{e,d})$ *donné par*

$$\sigma(y_a) = y_a, \qquad \sigma(\psi_b) = \psi_b, \qquad \sigma\big(e(\boldsymbol{k})\big) = e(\zeta\boldsymbol{k}).$$

En particulier, on a $\mathrm{H}_{p,n}^\Lambda(q) \simeq \mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma_{e,d})^\sigma$.

Idée de la preuve

L'assertion pour $\sigma\big(e(\boldsymbol{k})\big)$ et $\sigma(y_a)$ est automatique. Pour $\sigma(\psi_a)$, on utilise un choix de Stroppel–Webster pour l'isomorphisme de Brundan–Kleshchev.

Comme sous-algèbre de Hecke carquois cyclotomique

Proposition (R.)

On peut choisir l'isomorphisme $\mathrm{H}_n^\Lambda(q, \boldsymbol{u}_\zeta) \simeq \mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma_{e,d})$ *tel que* σ *devienne l'automorphisme homogène de* $\mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma_{e,d})$ *donné par*

$$\sigma(y_a) = y_a, \qquad \sigma(\psi_b) = \psi_b, \qquad \sigma\big(e(\boldsymbol{k})\big) = e(\zeta \boldsymbol{k}).$$

En particulier, on a $\mathrm{H}_{p,n}^\Lambda(q) \simeq \mathrm{R}_n^\Lambda(\Gamma_{e,d})^\sigma$*.*

Idée de la preuve

L'assertion pour $\sigma\big(e(\boldsymbol{k})\big)$ et $\sigma(y_a)$ est automatique. Pour $\sigma(\psi_a)$, on utilise un choix de Stroppel–Webster pour l'isomorphisme de Brundan–Kleshchev.

Corollaires

- *L'algèbre* $\mathrm{H}_{p,n}^\Lambda(q)$ *est une sous-algèbre graduée de* $\mathrm{H}_n^\Lambda(q, \boldsymbol{u}_\zeta)$*.*
- *On a une présentation de « type Hecke carquois » de* $\mathrm{H}_{p,n}^\Lambda(q)$*.*
- *Si* $q' \in F^\times$ *a le même ordre que* q *alors* $\mathrm{H}_{p,n}^\Lambda(q') \simeq \mathrm{H}_{p,n}^\Lambda(q)$*.*

Multi-partitions et résidus

Définition

Une *partition* d'un entier $n \in \mathbb{N}$ est une suite décroissante d'entiers strictement positifs $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_h > 0)$ de somme $n =: |\lambda|$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Une *r-partition* de n est un r-uplet $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ de partitions vérifiant $n = |\boldsymbol{\lambda}| := |\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(r)}|$.

Définition

Le *diagramme de Young* d'une r-partition $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ est

$$\mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda}) := \left\{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : 1 \leq c \leq r, 1 \leq b \leq \lambda_a^{(c)}\right\}.$$

Définition

Soient $e \in \mathbb{N}^*$ et $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_r) \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^r$.

- Le *résidu* de $\gamma = (a, b, c)$ est $\mathrm{res}(\gamma) := b - a + \kappa_c \pmod e$.
- Si $\boldsymbol{\lambda}$ est une r-partition, on note $\alpha(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{N}^e$ le vecteur multiplicité des résidus des éléments de $\mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda})$.

Blocs des algèbres d'Ariki–Koike

Dorénavant on suppose que $\zeta = q^\eta$ et on note $\mathrm{H}_n^\Lambda(q) := \mathrm{H}_n^\Lambda(q,1)$.

Théorème (Graham–Lehrer, Murphy, Dipper-James-Mathas, $\sim$1995)

L'algèbre $\mathrm{H}_n^\Lambda(q)$ possède une base cellulaire, en particulier il existe une collection $(S^{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda} \models_r n}$ de $\mathrm{H}_n^\Lambda(q)$-modules telle que :

- *chaque $S^{\boldsymbol{\lambda}}$ possède un quotient $D^{\boldsymbol{\lambda}}$ tel que $\{D^{\boldsymbol{\lambda}} \neq 0\}$ est une collection complète de modules irréductibles ;*
- *tous les facteurs de composition d'un même $S^{\boldsymbol{\lambda}}$ sont dans un même bloc de $\mathrm{H}_n^\Lambda(q)$.*

On dira que deux r-partitions $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$ sont dans le *même bloc* de $\mathrm{H}_n^\Lambda(q)$ si $S^{\boldsymbol{\lambda}}$ et $S^{\boldsymbol{\mu}}$ sont dans le même bloc de $\mathrm{H}_n^\Lambda(q)$.

Blocs des algèbres d'Ariki–Koike

Dorénavant on suppose que $\zeta = q^\eta$ et on note $\mathrm{H}_n^\Lambda(q) := \mathrm{H}_n^\Lambda(q,1)$.

Théorème (Graham–Lehrer, Murphy, Dipper-James-Mathas, ∼1995)

L'algèbre $\mathrm{H}_n^\Lambda(q)$ possède une base cellulaire, en particulier il existe une collection $(S^{\boldsymbol\lambda})_{\boldsymbol\lambda \models_r n}$ de $\mathrm{H}_n^\Lambda(q)$-modules telle que :

- *chaque $S^{\boldsymbol\lambda}$ possède un quotient $D^{\boldsymbol\lambda}$ tel que $\{D^{\boldsymbol\lambda} \neq 0\}$ est une collection complète de modules irréductibles ;*
- *tous les facteurs de composition d'un même $S^{\boldsymbol\lambda}$ sont dans un même bloc de $\mathrm{H}_n^\Lambda(q)$.*

On dira que deux r-partitions $\boldsymbol\lambda$ et $\boldsymbol\mu$ sont dans le *même bloc* de $\mathrm{H}_n^\Lambda(q)$ si $S^{\boldsymbol\lambda}$ et $S^{\boldsymbol\mu}$ sont dans le même bloc de $\mathrm{H}_n^\Lambda(q)$.

Théorème (Lyle–Mathas 2007)

Soit $\Lambda = (\Lambda_i) \in \mathbb{N}^I$ tel que Λ_i soit le nombre d'occurrences de q^i dans κ. Deux r-partitions $\boldsymbol\lambda$ et $\boldsymbol\mu$ sont dans le même bloc de $\mathrm{H}_n^\Lambda(q)$ si et seulement si $\alpha(\boldsymbol\lambda) = \alpha(\boldsymbol\mu)$.

Décalages

Soit $s := \frac{r}{p} \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Si $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ est une r-partition, on définit la r-partition suivante, obtenue par décalage :

$$^{\sigma}\boldsymbol{\lambda} := \left(\lambda^{(r-s+1)}, \dots, \lambda^{(r)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r-s)}\right).$$

Remarque

La façon dont se restreint $D^{\boldsymbol{\lambda}}$ en un $\mathrm{H}_{p,n}^{\Lambda}(q)$-module dépend du cardinal $\#[\boldsymbol{\lambda}]$ de l'orbite de $\boldsymbol{\lambda}$ sous cette action.

Proposition

Si $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_r) \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^r$ vérifie $\kappa_{k+s} = \kappa_k + \eta$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$ alors $\alpha(^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}) = \sigma \cdot \alpha(\boldsymbol{\lambda})$, i.e. $\alpha(^{\sigma}\boldsymbol{\lambda})_{i+\eta} = \alpha(\boldsymbol{\lambda})_i$ pour tout $i \in I$.

Étude des cardinaux des orbites sur les blocs

Théorème (R.)

Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une r-partition. On a :

$$\#[\alpha(\boldsymbol{\lambda})] = \min\{\#[\boldsymbol{\mu}] : \alpha(\boldsymbol{\mu}) = \alpha(\boldsymbol{\lambda})\}.$$

Corollaire

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^e$ vérifiant $\sigma \cdot \alpha = \alpha$. Si le bloc déterminé par α n'est pas vide, il contient une r-partition $\boldsymbol{\lambda}$ bégayante, i.e. qui vérifie ${}^\sigma\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$.

Exemple

On prend $r = p = 2$ ainsi que $e = 6$ et $\eta = 3$. La bi-partition $\boldsymbol{\lambda} := ((1,1),(3,2,2,1))$ est dans le bloc correspondant à $\alpha = (2,1,2,2,1,2)$, en effet les résidus sont donnés par $\begin{array}{c} 0 \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & \\ 1 & 2 & \\ 0 & & \end{array}$.

La bi-partition bégayante $\boldsymbol{\mu} := ((4,1),(4,1))$ est bien également dans ce bloc, les résidus étant donnés par $\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & & & \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & & & \end{array}$.

Idée de la preuve (cas $r = 2$)

L'énoncé se ramène à un problème de minimisation du type suivant, où $q : \mathbb{Q}^e \times \mathbb{Q}^e \to \mathbb{Q}$ est un polynôme de degré 2 convexe et symétrique en $(x, y) \in \mathbb{Q}^e \times \mathbb{Q}^e$ et $\delta_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i.

Soit $\mathcal{C}$ la partie de $\mathbb{Q}^e \times \mathbb{Q}^e$ déterminée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_0 + \cdots + x_{e-1} &= 0, \\ y_0 + \cdots + y_{e-1} &= 0, \\ x_i + y_{i+\eta} = x_{i+\eta} + y_i &= \delta_i, \qquad \text{pour tout } i \end{aligned}$$

Le minimum de q sur $\mathcal{C} \cap (\mathbb{Z}^e \times \mathbb{Z}^e)$ est atteint en un point (z, z).

Idée de la preuve (cas $r = 2$)

L'énoncé se ramène à un problème de minimisation du type suivant, où $q : \mathbb{Q}^e \times \mathbb{Q}^e \to \mathbb{Q}$ est un polynôme de degré 2 convexe et symétrique en $(x, y) \in \mathbb{Q}^e \times \mathbb{Q}^e$ et $\delta_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i.

Soit $\mathcal{C}$ la partie de $\mathbb{Q}^e \times \mathbb{Q}^e$ déterminée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_0 + \cdots + x_{e-1} &= 0, \\ y_0 + \cdots + y_{e-1} &= 0, \\ x_i + y_{i+\eta} = x_{i+\eta} + y_i &= \delta_i, \qquad \text{pour tout } i \end{aligned}$$

Le minimum de q sur $\mathcal{C} \cap (\mathbb{Z}^e \times \mathbb{Z}^e)$ est atteint en un point (z, z).

En effet, soit $(\tilde{z}, \tilde{z}) \in \mathbb{Q}^e \times \mathbb{Q}^e$ un point où q atteint son minimum sur $\mathcal{C}$, que l'on approche par $(z, z) \in \mathbb{Z}^e \times \mathbb{Z}^e$. On veut :

- que (z, z) reste dans $\mathcal{C}$
- estimer l'erreur commise pour que (z, z) soit un minimum sur $\mathcal{C} \cap (\mathbb{Z}^e \times \mathbb{Z}^e)$

Idée de la preuve (cas $r = 2$)

L'énoncé se ramène à un problème de minimisation du type suivant, où $q : \mathbb{Q}^e \times \mathbb{Q}^e \to \mathbb{Q}$ est un polynôme de degré 2 convexe et symétrique en $(x, y) \in \mathbb{Q}^e \times \mathbb{Q}^e$ et $\delta_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i.

Soit $\mathcal{C}$ la partie de $\mathbb{Q}^e \times \mathbb{Q}^e$ déterminée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_0 + \cdots + x_{e-1} &= 0, \\ y_0 + \cdots + y_{e-1} &= 0, \\ x_i + y_{i+\eta} = x_{i+\eta} + y_i &= \delta_i, \qquad \text{pour tout } i \end{aligned}$$

Le minimum de q sur $\mathcal{C} \cap (\mathbb{Z}^e \times \mathbb{Z}^e)$ est atteint en un point (z, z).

En effet, soit $(\tilde{z}, \tilde{z}) \in \mathbb{Q}^e \times \mathbb{Q}^e$ un point où q atteint son minimum sur $\mathcal{C}$, que l'on approche par $(z, z) \in \mathbb{Z}^e \times \mathbb{Z}^e$. On veut :

- que (z, z) reste dans $\mathcal{C}$ $\to$ existence d'une certaine matrice binaire
- estimer l'erreur commise pour que (z, z) soit un minimum sur $\mathcal{C} \cap (\mathbb{Z}^e \times \mathbb{Z}^e)$ $\to$ utilisation de la forte convexité de q

Application et conjecture

Hu et Mathas ont montré que $\mathrm{H}_n^{\Lambda}(q)$ possède une base cellulaire *homogène*. La projection $\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\sigma^j$ permet de donner une base homogène de $\mathrm{H}_{p,n}^{\Lambda}(q)$.

Corollaire

Si $\mathrm{pgcd}(p,n) > 1$ et p impair, il n'y a pas de façon naturelle de voir la base précédente comme une base cellulaire de $\mathrm{H}_{p,n}^{\Lambda}(q)$.

Application et conjecture

Hu et Mathas ont montré que $\mathrm{H}_n^{\Lambda}(q)$ possède une base cellulaire *homogène*. La projection $\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\sigma^j$ permet de donner une base homogène de $\mathrm{H}_{p,n}^{\Lambda}(q)$.

Corollaire

Si $\mathrm{pgcd}(p,n) > 1$ *et* p *impair, il n'y a pas de façon naturelle de voir la base précédente comme une base cellulaire de* $\mathrm{H}_{p,n}^{\Lambda}(q)$*.*

Webster puis Bowman ont construit une famille de bases cellulaires graduées pour $\mathrm{H}_n^{\Lambda}(q)$, comprenant celle de Hu–Mathas comme cas particulier.

Conjecture (Hu-Mathas-R.)

L'automorphisme σ permute les éléments de l'une des bases celullaires graduées construites par Webster et Bowman.

Il y a alors une façon naturelle de construire une base cellulaire graduée pour $\mathrm{H}_{p,n}^{\Lambda}(q)$.

Fin

Merci de votre attention.