

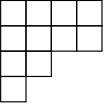
# Cocktail à base de partition

Salim ROSTAM\*

Vendredi 22 septembre 2023

## 1 Mesure de Plancherel sur l'ensemble des partitions

**Définition 1.1.** Une **partition** d'un entier naturel  $n$  est une suite (décroissante)  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0)$  vérifiant  $|\lambda| := \sum_{i=1}^r \lambda_i = n$ .

*Exemple 1.2.* La suite  $(4, 4, 2, 1)$  est une partition de 11. On peut la représenter avec son **diagramme de Young**, qui est .

Les partitions de  $n$  paramètrent les **classes de conjugaison** du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  (cf. décomposition en cycles à supports disjoints). En particulier, elles paramètrent ses **représentations** complexes irréductibles. Ces représentations irréductibles, qui sont des analogues pour les représentations des nombres premiers pour les entiers, ont des dimensions (ce sont des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels).

**Théorème 1.3** (Specht 1930'). *On peut indexer les représentations complexes irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$  par  $(S^\lambda)_{\lambda \in \mathcal{P}_n}$  de sorte que*

$$\dim S^\lambda = \#\text{Std}(\lambda),$$

où  $\text{Std}(\lambda)$  est l'ensemble des tableaux standards de forme  $\lambda$ .

Si  $\lambda$  est une partition de  $n$ , son diagramme de Young  $\mathcal{Y}(\lambda)$  possède  $n$  cases. Un tableau (de Young) standard de forme  $\lambda$  est une bijection  $\tau : \mathcal{Y}(\lambda) \rightarrow \{1, \dots, n\}$  telle que les étiquettes sont croissantes de gauche à droite et de haut en bas.

*Exemple 1.4.* Pour  $\lambda = (3, 2)$ , l'ensemble  $\text{Std}(\lambda)$  possède éléments :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \\ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}. \end{array} \end{array}$$

*Remarque 1.5.* Il existe une formule remarquable donnant  $\#\text{Std}(\lambda)$ , appelée « formule des équerres » (« hook formula »). Elle peut se démontrer de façon probabiliste via une marche aléatoire sur le diagramme de Young de  $\lambda$ .

La théorie des représentations complexes des groupes finis nous dit que  $\#\mathfrak{S}_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} (\dim S^\lambda)^2$ . Le Théorème précédent donne donc :

$$n! = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \#\text{Std}(\lambda)^2.$$

**Définition 1.6.** La **mesure de Plancherel** sur  $\mathcal{P}_n$  est donnée par :

$$\text{Pl}_n(\lambda) := \frac{\#\text{Std}(\lambda)^2}{n!}.$$

---

\*Institut Denis Poisson, Université de Tours

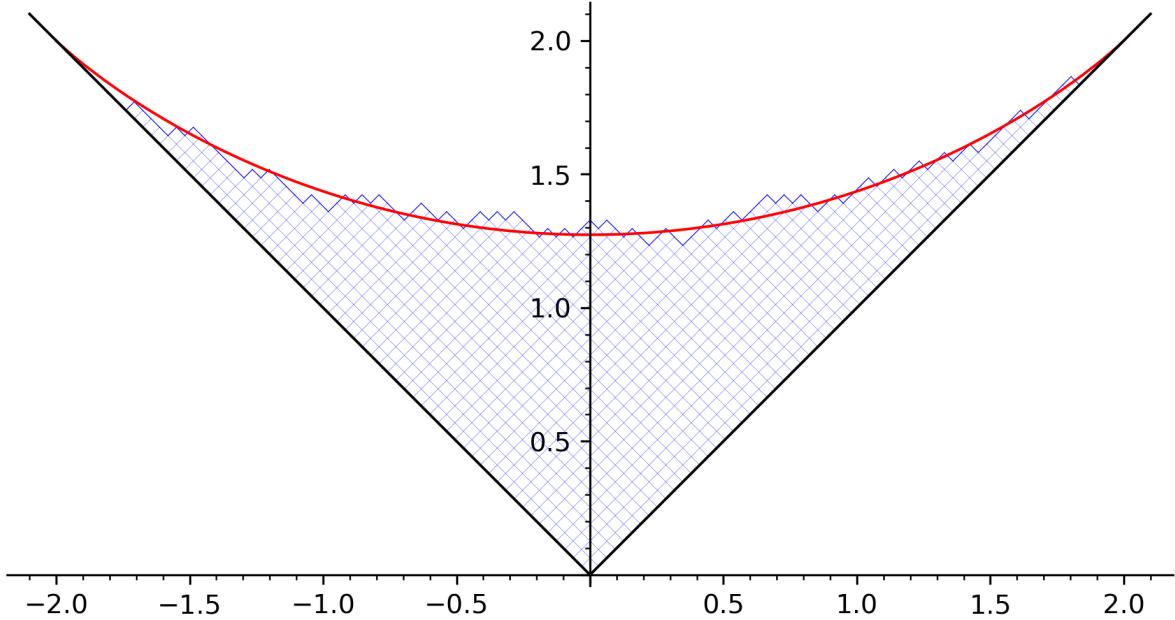


FIGURE 1 – Forme limite d'un diagramme de Young tiré selon la mesure de Plancherel  $\text{Pl}_{1000}$

## 2 Forme limite

**Théorème 2.1** (Kerov–Vershik, Logan–Shepp, 1977). *La frontière supérieure du diagramme de Young, tourné d'un angle de  $\frac{3\pi}{4}$  et renormalisé, d'une partition tirée selon la mesure de Plancherel, converge uniformément en probabilité sur  $\mathbb{R}$  quand  $n \rightarrow +\infty$  vers la courbe de la fonction  $\Omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par :*

$$\Omega(s) := \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left( s \arcsin\left(\frac{s}{2}\right) + \sqrt{4 - s^2} \right), & \text{si } |s| \leq 2, \\ |s|, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette façon de représenter le diagramme de Young d'une partition est la convention **russe**. Une illustration du Théorème est donnée en Figure 1. Ce résultat a été à l'origine démontré en minimisant une intégrale (*hook integral*, « l'intégrale-crochet »). Il peut également se démontrer en exprimant les moments des caractères centraux de  $\mathfrak{S}_n$ .

*Remarque 2.2.* La forme limite  $\Omega$  est une primitive sur  $(-2, 2)$  de la fonction  $s \mapsto \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{s}{2}\right)$ .

*Remarque 2.3.* On a également la convergence du support, en particulier  $\frac{\lambda_1}{\sqrt{n}}$  converge (en probabilité) vers 2. Notons que  $\lambda_1$  est la longueur de la première ligne de  $\mathcal{Y}(\lambda)$ ; le même résultat est valable pour la longueur de la première colonne (via la conjugaison — *i.e.* transposition — de partitions). Via la correspondance de Robinson–Schensted entre  $\mathfrak{S}_n$  et  $\amalg_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \text{Std}(\lambda)^2$ , cela répond au **problème d'Ulam**, et montre que la longueur d'un plus grand sous-mot croissant d'un élément de  $\mathfrak{S}_n$  tiré uniformément est de l'ordre de  $2\sqrt{n}$ . L'asymptotique à l'ordre supérieur est en  $n^{1/6}$ , et fait apparaître les distributions de Tracy–Widom (et met en évidence une analogie avec la répartition des valeurs propres de certaines matrices aléatoires), voir Baik–Deift–Johansson, Borodin–Okounkov–Olshanski, Johansson, Okounkov.

*Remarque 2.4.* Kerov–Vershik ont aussi montré un résultat qui concerne la dimension maximale des représentations irréductibles. Plus précisément, il existe des constantes  $c_0, c_1 > 0$  telles que

si  $\lambda_M \in \mathcal{P}_n$  vérifie  $\dim S^{\lambda_M} = \max \dim_{\lambda \in \mathcal{P}_n} S^\lambda$  alors :

$$n! e^{-c_0\sqrt{n}} \leq \dim S^{\lambda_M} \leq n! e^{-c_1\sqrt{n}},$$

en particulier, la quantité  $\frac{\dim S^{\lambda_M}}{n!}$  décroît plus vite que tout polynôme en  $n$ .

*Remarque 2.5.* Kerov–Vershik ont également montré un résultat qui concerne la dimension *typique* des représentations irréductibles. Plus précisément, il existe des constantes  $d_0, d_1$  telles que si  $E_n$  est l'ensemble des partitions de  $n$  qui vérifient :

$$n! e^{-d_0\sqrt{n}} \leq \dim S^\lambda \leq n! e^{-d_1\sqrt{n}},$$

alors  $\text{Pl}_n(E_n) \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### 3 Régularisation de partitions

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $p \leq n$  un nombre premier. On s'intéresse maintenant à la théorie des représentations de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\mathbb{F}_p$ . La différence fondamentale avec le cas complexe est que la théorie des représentations n'est plus semi-simple, c'est-à-dire, il ne suffit plus de comprendre les représentations irréductibles pour comprendre toutes les représentations (certaines représentations ne sont plus des sommes directes de représentations irréductibles).

Cependant, il est quand même intéressant d'étudier les représentations irréductibles ; en outre, on peut quand même décomposer toute représentation à l'aide de représentations irréductibles (à l'aide d'une suite de Jordan–Hölder), mais deux représentations peuvent avoir la même décomposition sans être isomorphes. Les représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sont maintenant indexées par les partitions  **$p$ -régulières**.

**Définition 3.1.** Une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_h > 0)$  est dite  **$p$ -régulière** si aucune part ne se répète  $p$  fois ou plus, c'est-à-dire, si  $\lambda_i \neq \lambda_{i+p}$  pour tout  $i < h-p$ .

*Exemple 3.2.* — Les partitions 2-régulières sont celles à part distinctes : ainsi  $(4, 3, 1)$  est 2-régulière mais pas  $(4, 4, 4, 1)$ .

— La partition  $(5, 5, 4, 4, 4, 2)$  est  $p$ -régulière ssi  $p > 3$ .

*Remarque 3.3.* Contrairement au cas des représentations complexes, on ne connaît cette fois pas de formule donnant la dimension des dimensions irréductibles... !

Étant donné une représentation irréductible **complexe**  $S^\lambda$  de  $\mathfrak{S}_n$ , on dispose d'un moyen pour la voir comme une représentation sur  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  (via réduction modulo  $p$ ). On peut alors décomposer cette représentation comme avant à l'aide de représentations irréductibles sur  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , et se poser la question suivant : quelles sont les partitions  $p$ -régulières qui apparaissent dans cette décomposition ?

**Théorème 3.4** (James 1976). *On peut définir une opération de  $p$ -régularisation qui à une partition  $\lambda$  de  $n$  associe une représentation  $p$ -régulière  $\text{reg}_p(\lambda)$  de  $n$  telle que  $\text{reg}_p(\lambda)$  apparaisse exactement une fois dans la décomposition précédente pour  $S^\lambda$ .*

On va maintenant présenter cette opération de  $p$ -régularisation. On considère l'étiquetage suivant de boîtes :

1	$p$	$2p-1$	$3p-2$	$\dots$
2	$p+1$	$2p$	$\vdots$	$\ddots$
3	$p+2$	$2p+1$	$\vdots$	$\ddots$

(attention, ici l'étiquetage n'a rien à voir avec les tableaux standards!). En d'autres termes, on place les éléments de  $\mathbb{N}^*$  sur la première colonne, et on ajoute  $p - 1$  pour chaque pas vers la droite (en particulier  $p$  se trouve directement à droite de 1).

*Exemple 3.5.* Pour  $p = 3$ , une partie de l'étiquetage est

1	3	5	7
2	4	6	8
3	5	7	9

**Définition 3.6** (James 1976). — Une boîte étiquetée par  $i$  appartient à l'**échelle  $i$** .

- Si  $\lambda$  est une partition, sa  $p$ -régularisation  $\text{reg}_p(\lambda)$  est la partition obtenue à partir du diagramme de Young de  $\lambda$  en remontant chaque boîte aussi haut possible dans son échelle.

*Remarque 3.7.* La définition précédente a un sens même si  $p \geq 2$  n'est pas premier ; dans ce cas on utilisera plutôt la lettre  $e \geq 2$ . Il y a toujours un sens au niveau de la théorie des représentations, mais cette fois pour l'**algèbre de Iwahori–Hecke** de  $\mathfrak{S}_n$ , qui est une déformation de l'algèbre de groupe de  $\mathfrak{S}_n$ , où le paramètre de déformation est une racine primitive complexe  $e$ -ième de l'unité.

**Proposition 3.8.** *Si  $\lambda$  est une partition alors  $\text{reg}_e(\lambda)$  est une partition et est  $e$ -régulière.*

*Exemple 3.9.* On va déterminer la 3-régularisation de  $\lambda = (4, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$ . On détermine d'abord les échelles (en rouge, celles qui correspondent aux boîtes du diagramme de Young de  $\lambda$ ) :

1	3	5	7	9
2	4	6	8	
3	5	7	9	
4	6	8		
5	7	9		
6	8			
7	9			
8				
9				

Seules les échelles 8 et 9 ne sont pas justifiées en haut. On bouge le 8 et le 9 du bas pour trouver :

1	3	5	7	9
2	4	6	8	
3	5	7	9	
4	6	8		
5	7	9		
6	8			
7	9			
(8)				
(9)				

(avec en bleu les nouvelles boîtes), donc  $\text{reg}_3(\lambda) = (5, 4, 3, 3, 2, 1, 1)$ , qui est bien 3-régulière.

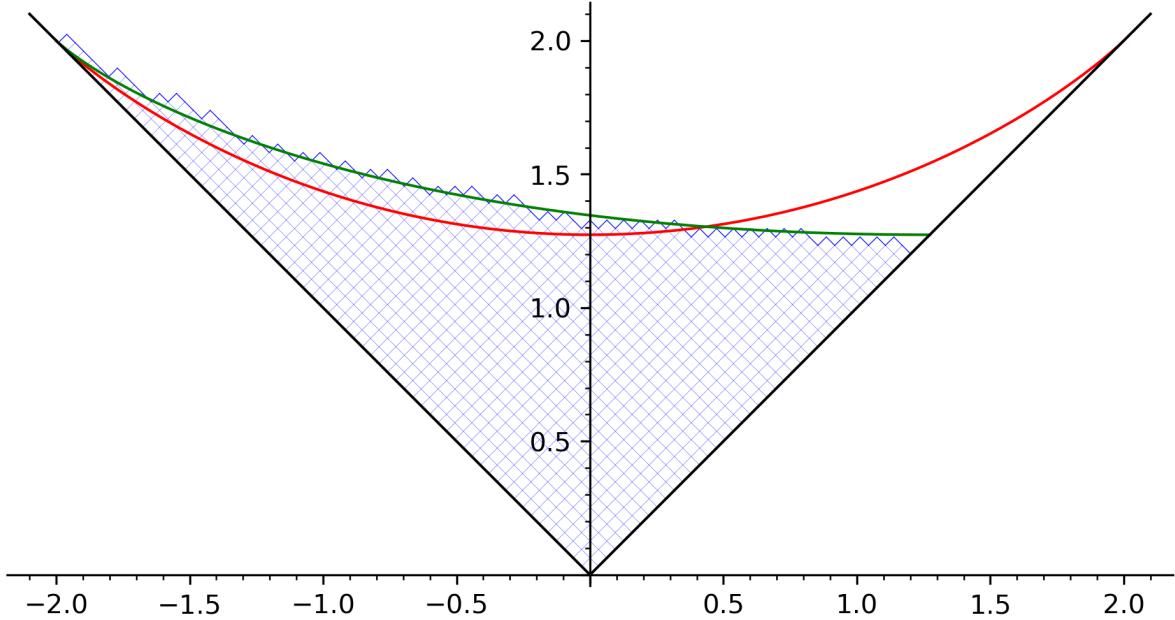


FIGURE 2 – Forme limite (en vert) pour la 2-régularisation d’une partition tirée selon  $\text{Pl}_{1000}$  ; en rouge la forme limite  $\Omega$ .

## 4 Formes limites pour la régularisation de partitions sous la mesure de Plancherel

Rappelons que, sous la mesure de Plancherel, les grandes partitions possède la forme limite  $\Omega$  (cf. Section 2). On se pose alors la question suivante : si  $e \geq 2$  et si  $\lambda$  est une grande partition tirée suivant la mesure de Plancherel, la partition  $\text{reg}_e(\lambda)$  possède-t-elle une forme limite ?

### 4.1 Énoncés

**Théorème 4.1** (R. 2023). *Oui ! La forme limite  $\Omega_e$  vérifie une équation de la forme :*

$$\Omega_e(s + \delta_s) = \Omega(s) + (1 - 2e^{-1})\delta_s,$$

où  $\delta_s$  est défini à partir de l’inverse de  $s \mapsto \Omega(s) - (1 - 2e^{-1})s$ . Le cas  $e = 2$  se simplifie en :

$$\begin{aligned} \Omega_2(s) &= |s| && \text{pour } s \leq -2 \\ \Omega_2(2s + \Omega(s)) &= \Omega(s), && \text{pour } -2 < s < 0, \\ \Omega_2(s) &= s, && \text{pour } s \geq \Omega(0) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Une illustration du Théorème dans le cas  $e = 2$  est donné en Figure 2. On donne en Figure 3 un exemple de  $e$ -régularisation de grande partition pour  $e \in \{3, 4\}$ . Malgré le caractère non explicite de l’énoncé du Théorème, on peut quand même donner une forme simple pour la première asymptotique des longueurs de lignes et de colonne.

**Corollaire 4.2** (R. 2023). *Si  $\lambda$  est tirée selon  $\text{Pl}_n$ , alors on a les convergences en probabilité suivantes quand  $n \rightarrow +\infty$  :*

- la longueur de la première ligne de  $\mathcal{Y}(\text{reg}_e(\lambda))$  converge vers  $2\sqrt{n}$  ;
- la longueur de la première colonne de  $\mathcal{Y}(\text{reg}_e(\lambda))$  converge vers  $\frac{2e\sqrt{n}}{\pi} \sin \frac{\pi}{e}$ .

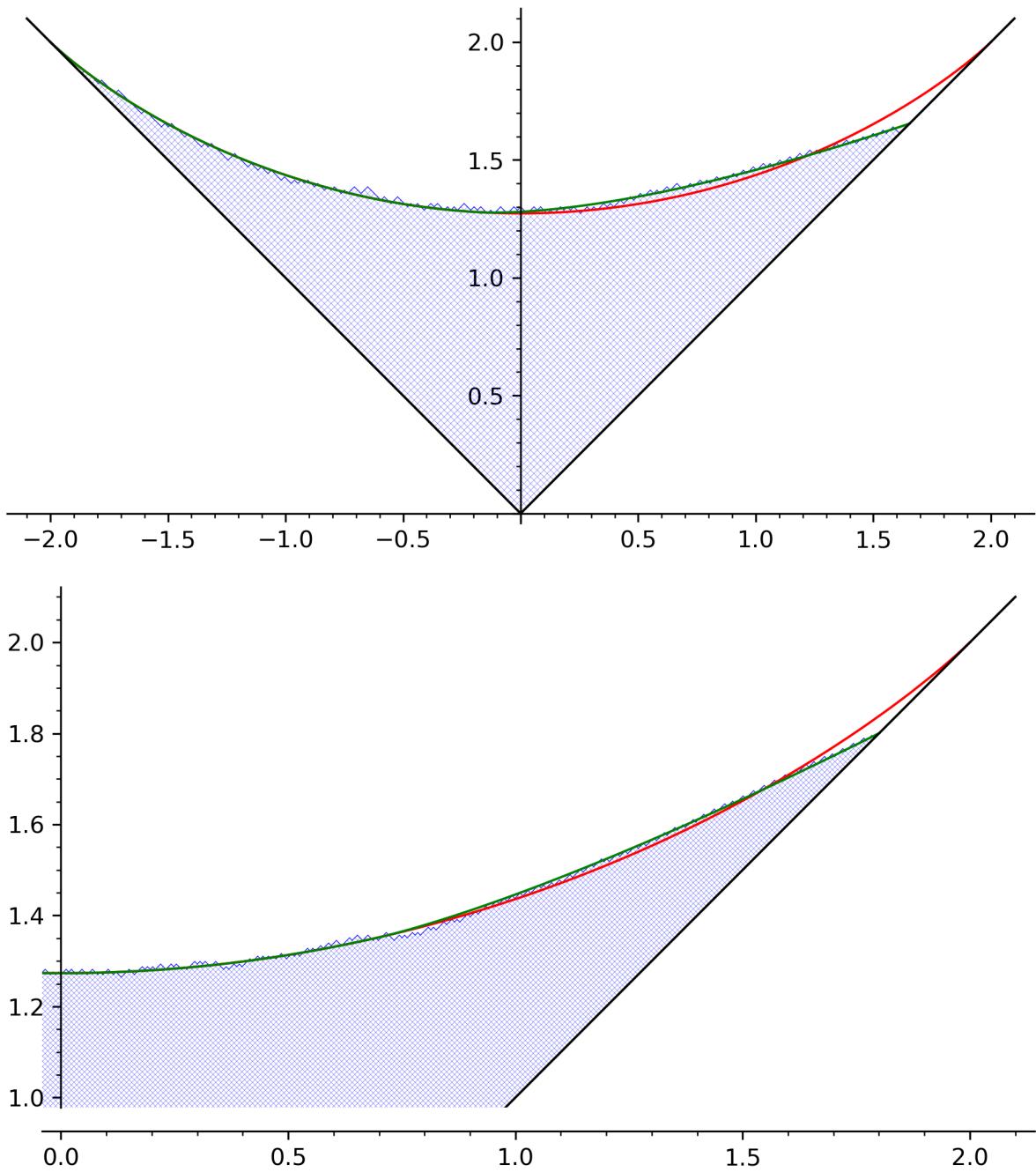


FIGURE 3 –  $e$ -régularisation d'une partition tirée selon  $\text{Pl}_{7000}$  pour  $e = 3$  (en haut) et selon  $\text{Pl}_{30000}$  pour  $e = 4$  (en bas) ; en rouge la forme limite  $\Omega$ .

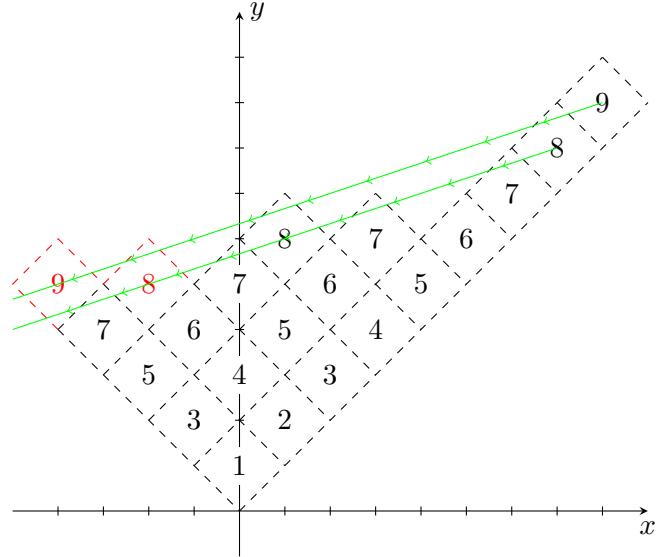


FIGURE 4 – Glissement des boîtes en convention russe pour la 3-régularisation de  $\lambda = (4, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$

## 4.2 Secouages

Dans la convention russe, les boîtes de la renormalisation sont obtenues en glissant les boîtes de la partition initiale à gauche le long de la droite d'équation  $y = (1 - 2e^{-1})x$ . À titre d'illustration, on reprend l'Exemple 3.9 pour la 3-régularisation de  $\lambda = (4, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$  en Figure 4.

**Définition 4.3** (Steiner 1838, Blaschke 1917). Soit  $\alpha \geq 0$ . Si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$ , son **secouage** (« *shaking* ») de direction  $\alpha$  (contre la droite d'équation  $y = -x$ ) est le compact  $\text{Sh}_\alpha(K)$  de  $\mathbb{R}^2$  obtenu en glissant les différentes tranches de  $K$  dans la direction de  $y = \alpha x$  jusqu'à rencontrer  $y = -x$ .

*Remarque 4.4.* Le procédé introduit par Blaschke est en fait dans le cas où la ligne contre laquelle on projette est orthogonale à la direction, dans le cadre du « problème des quatre points » de Sylvester (« étant donné quatre points du plan, quelle est la probabilité pour que l'enveloppe convexe ait quatre côtés ? » Sylvester, 1865). La définition de Steiner est quand à elle légèrement différente (on translate de façon à avoir une figure finale symétrique par rapport à l'axe de projection), et cette « symétrisation de Steiner » a été utilisée dans le cadre d'une preuve (partielle) de l'inégalité isopérimétrique.

Un exemple de secouage est donné en Figure 5. L'idée de la démonstration du Théorème est alors que la forme limite  $\Omega_e$  va être obtenue par **secouage** de la forme  $\Omega$ . Plus précisément, si pour une fonction  $f$  on note :

$$\mathbb{Y}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq f(x)\}$$

(c'est la partie du graphe de  $f$  qui est au-dessus de la courbe de la valeur absolue) alors  $\Omega_e$  est la fonction telle que  $\mathbb{Y}(\Omega_e) = \text{Sh}_{1-2e^{-1}}(\mathbb{Y}(\Omega))$ . Une illustration dans le cas  $e = 2$  est donnée en Figure 6, et une autre dans le cas  $e = 3$  (sans la forme limite) est donnée en Figure 7. Cela explique la valeur pour la partie maximale du support obtenue dans le Corollaire, qui correspond

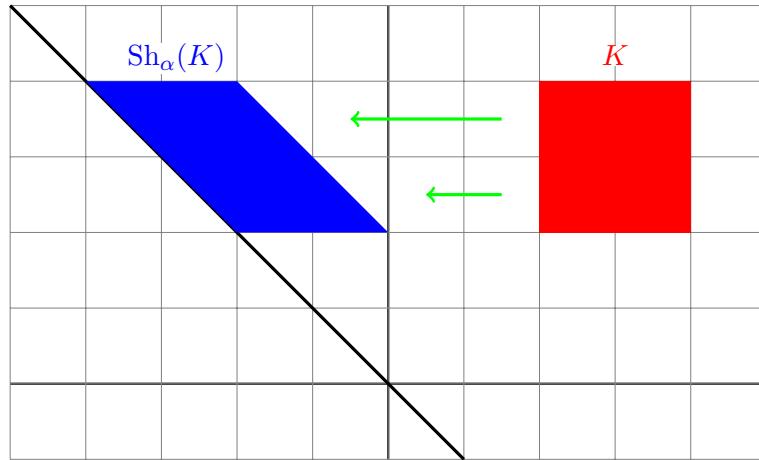


FIGURE 5 – Exemple de secouage  $\text{Sh}_\alpha$  pour  $\alpha = 0$

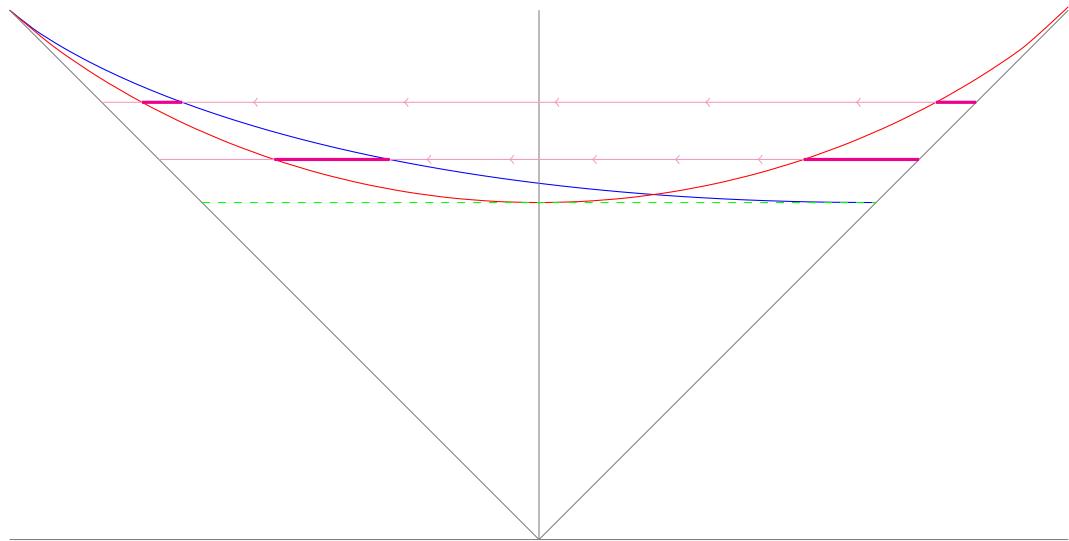


FIGURE 6 – Les formes  $\Omega_2$  (en bleu) et  $\Omega$  (en rouge). En vert la tangente à  $\Omega$  en 0. Les segments magentas de gauche sont ce qui est « ajouté » à la forme  $\Omega$ , et proviennent des segments magentas de droite via le secouage de  $\mathbb{Y}(\Omega)$ .

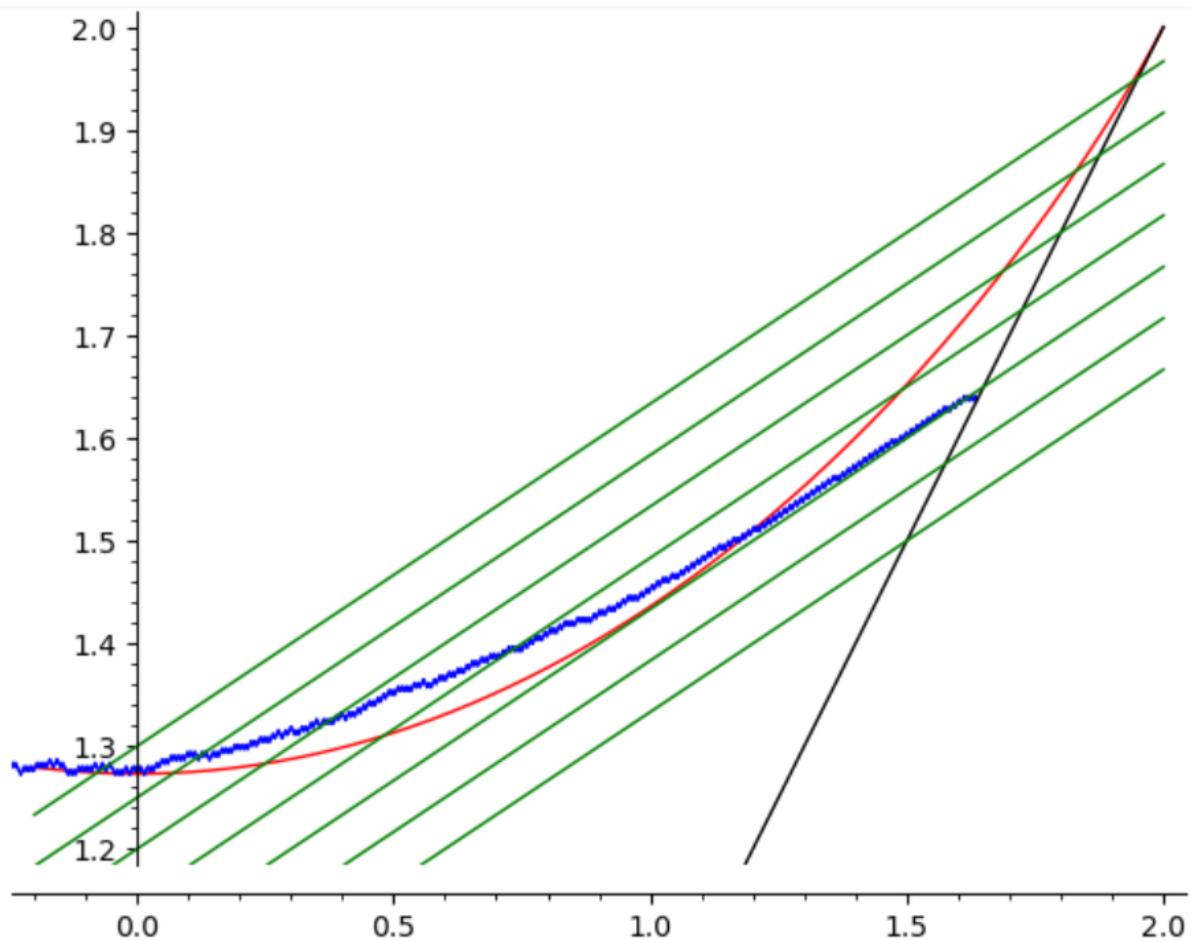


FIGURE 7 – Le secouage de la forme  $\Omega$  (en rouge) pour  $e = 3$  approche la 3-régularisation de grandes partitions (en bleu).

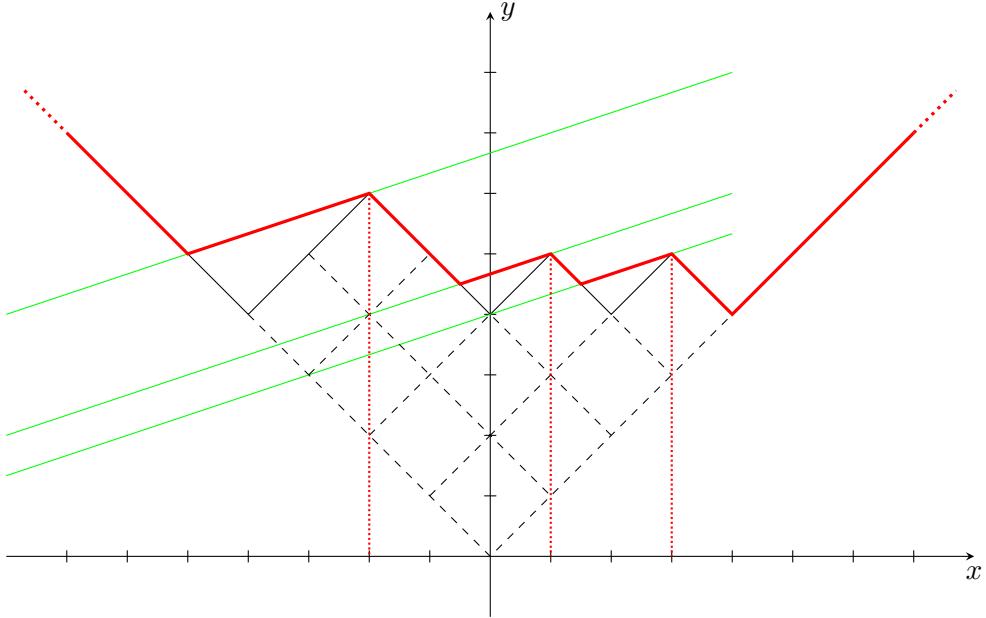


FIGURE 8 – Partie stable par secouage pour  $e = 3$  et  $\lambda = (4, 4, 2, 1)$

en fait au point d'intersection avec  $y = x$  de l'unique **tangente** à la courbe de  $\Omega$  qui a pour pente  $1 - 2e^{-1}$ .

Plusieurs points restent alors à établir pour terminer la démonstration.

1. L'ensemble  $\text{Sh}_{1-2e^{-1}}(\mathbb{Y}(\Omega))$  est bien le graphe d'une fonction : on trouve d'abord une expression paramétrique via la définition du secouage. De façon générale, il faut une condition sur la dérivée pour que le secouage d'un graphe reste un graphe.
2. Si  $\lambda$  est proche de  $\Omega$  alors  $\text{reg}_e(\lambda)$  est proche de  $\Omega_e$ . Il suffit de remarquer les points suivants :
  - le secouage des diagrammes russes de  $\lambda$  et  $\text{reg}_e(\lambda)$  sont les mêmes ;
  - le diagramme russe de  $\text{reg}_e(\lambda)$  n'est pas nécessairement stable par secouage, en revanche on peut le coincer entre deux parties proches et stables par secouage (une telle partie est donnée en Figure 8) ;
  - l'opération de secouage préserve les inclusions (propriété classique des secouages).