Une fenêtre sur l'ordre de Bruhat sur le groupe symétrique $\widetilde{\mathfrak{S}}_e$

Salim Rostam*

11 mars 2025, conférence de clôture ANR Combiné, ICJ (Lyon)

1 Groupe symétrique

$\mathfrak{S}_e \simeq \langle s_1, \dots, s_{e-1} \rangle$ avec les relations :

$$s_i^2 = 1,$$
$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, e-2\},$$
$$s_i s_j = s_j s_i \text{ pour tout } i - j \neq \pm 1.$$

L'isomorphisme est donné par $(i, i+1) \leftarrow\!\shortmid s_i$.

Définition (Ordre de Bruhat (fort))**.** Soient $w, w' \in \mathfrak{S}_e$. On a $w \trianglelefteq w'$ s'il existe une expression *réduite* (i.e. longueur minimale) $w' = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$ et $a_1 < \cdots < a_k$ tels que :

$$w = s_{i_{a_1}} \cdots s_{i_{a_k}},$$

i.e. w est un sous-mot de w'.

Définition. Soit $k \in \{1, \dots, e-1\}$. Le k-ième réordonné de w est la suite croissante $R_k(w)$ obtenue en triant $w(1), \dots, w(k)$.

Proposition (Ehresmann 1934)**.** *Pour $w, w' \in \mathfrak{S}_e$ on a $w \trianglelefteq w' \iff$ pour tout k, pour tout $i \leq k$, le i-ème élément de $R_k(w)$ est $\leq$ que le i-ème élément de $R_k(w')$.*

Exemple. On prendra toujours $e = 4$ dans les exemples. On a d'une part $s_3 s_1 \trianglelefteq s_3 s_2 s_1$. D'autre part, en notation « une ligne » on a $s_3 s_1 = 2143$ et $s_3 s_2 s_1 = 4123$ donc on obtient :

	$s_3 s_1$	$s_3 s_2 s_1$
R_1	1	4
R_2	12	14
R_3	124	124

Le résultat suivant permet donc de passer à une forme « expression réduite » à une forme « en fonction des images ».

Remarque. De même, on peut définir l'ordre de Bruhat faible en fonction des générateurs, et le retranscrire en fonction des images (inclusion des ensembles d'inversion).

*Institut Denis Poisson, CNRS UMR 7013, Université de Tours, 37200 Tours, France

2 Groupe symétrique affine

$\widetilde{\mathfrak{S}}_e \simeq \langle s_0, s_1, \dots, s_{e-1}\rangle$ avec les relations :

$$\begin{gathered} s_i^2 = 1, \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}, \\ s_i s_j = s_j s_i \text{ pour tout } i - j \neq \pm 1. \end{gathered}$$

L'isomorphisme est donné par $\prod_{k\in\mathbb{Z}}(i + ke, i + 1 + ke) \leftarrow\!\shortmid s_i$.

Proposition. *Soit $w : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Alors $w \in \widetilde{\mathfrak{S}}_e$ ssi les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

$$w \text{ est bijective}, \tag{$\clubsuit$}$$

$$w(n + e) = w(n) + e \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}, \tag{$\clubsuit$}$$

$$w(1) + \cdots + w(e) = \frac{e(e + 1)}{2}.$$

Remarque. Si $w \in \widetilde{\mathfrak{S}}_e$ alors $w(1), \dots, w(e)$ sont deux à deux distincts modulo e.

Les deux premières conditions précédentes impliquent que $w \in \widetilde{\mathfrak{S}}_e$ est entièrement déterminé par $w(1), \dots, w(e)$.

Définition. La *notation fenêtre* de $w \in \widetilde{\mathfrak{S}}_e$ est $[w(1), \dots, w(e)]$.

Tout comme dans $\mathfrak{S}_e$, on peut définir l'ordre de Bruhat dans $\widetilde{\mathfrak{S}}_e$ (c'est la même définition). La question est la suivante : peut-on décider si $w \trianglelefteq w'$ à partir de la notation fenêtre ?

3 Action sur les abaques

On a une action naturelle par automorphisme $\widetilde{\mathfrak{S}}_e \curvearrowright \mathbb{Z}$, et donc $\widetilde{\mathfrak{S}}_e \curvearrowright \{\text{parties de } \mathbb{Z}\}$.

Définition. $A \subseteq \mathbb{Z}$ *abaque* s'il existe $s \geq 0$ tel que $A \supseteq \mathbb{Z}_{\leq -s}$ et $A \cap \mathbb{Z}_{\geq s} = \emptyset$.

À chaque abaque on peut associer sa *charge*, que l'on peut définir de la façon suivante :

- la charge de l'abaque $\mathbb{Z}_{\leq c}$ est c ;
- la charge est invariante par mouvement d'un nombre fini de billes.

Pour $c \in \mathbb{Z}$ on a donc $\widetilde{\mathfrak{S}}_e \curvearrowright \{\text{abaques de charge } c\}$. (L'action de s_i sur un abaque ne bouge bien qu'un nombre fini de billes d'après la définition d'un abaque.)

Proposition. *Pour $w \in \widetilde{\mathfrak{S}}_e$ on a $w(\mathbb{Z}_{\leq 0}) = \bigsqcup_{i=1}^{e}(w(i) + e\mathbb{Z}_{<0})$.*

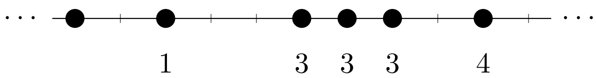
Démonstration. $\mathbb{Z}_{\leq 0} = \bigsqcup_{i=1}^{e}(i + e\mathbb{Z}_{<0})$ donc puisque w est une bijection et d'après ($\clubsuit$) on a $w(\mathbb{Z}_{\leq 0} = \bigsqcup_{i=1}^{e}(w(i + e\mathbb{Z}_{<0}) = \bigsqcup_{i=1}^{e}(w(i) + e\mathbb{Z}_{<0})$. ☐

On peut donc déterminer l'action de w sur l'abaque vide à partir de sa notation fenêtre uniquement (donc e valeurs), contre un nombre arbitrairement grand d'opérations si on regarde une expression réduite.

4 Action sur les partitions

Proposition. *Soit $c \in \mathbb{Z}$. On a une bijection $\{$abaques de charge $c\} \to \{$partitions c-chargées$\}$ données par $A \mapsto \lambda = (\lambda_k)$ où λ_k est le nombre total de trous à gauche de la k-ième plus grande bille de A.*

Exemple.



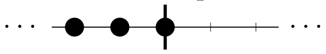
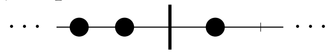
donc la partition associée est $(4, 3, 3, 3, 1)$.

On a donc $\widetilde{\mathfrak{S}}_e \curvearrowright \{$partitions c-chargées$\}$.

Définition. λ partition c-chargée. Le *résidu* de $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ est $b - a + c \pmod e$.

Exemple. Pour $e = 4$ et $c = 1$, les résidus de la partition $(4, 2, 1, 1, 1)$ sont $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&0\\\hline 0&1\\\cline{1-2} 3\\\cline{1-1} 2\\\cline{1-1} 1\\\cline{1-1}\end{array}$. Comme ici, dans la suite on écrira les diagrammes de Young avec les résidus à l'intérieur.

Proposition. *λ partition c-chargée d'abaque A. Ajouter (resp. enlever) une boîte de résidu i équivaut à bouger une bille $x \in A$ (resp. $x + 1 \in A$) avec $x \equiv i$ d'un cran vers la droite (resp. gauche)*

Exemple. $\lambda = \emptyset_0$ n'a qu'une boîte de résidu 0 ajoutable, et pas de boîte enlevable. L'abaque de λ est  et l'abaque de $\boxed{0}$ est 

Corollaire. *$s_i\lambda$ est obtenue de λ en ajoutant et enlevant (simultanément) tous les i-nœuds possibles.*

Exemple. Pour $e = 4$, avec $w = s_3 s_2 s_1 s_0$ on obtient :

$$\emptyset_0 \xrightarrow{s_0} \boxed{0} \xrightarrow{s_1} \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline\end{array} \xrightarrow{s_2} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&2\\\hline\end{array} \xrightarrow{s_3} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},$$

et :

$$\emptyset_1 \xrightarrow{s_0} \emptyset_1 \xrightarrow{s_1} \boxed{1} \xrightarrow{s_2} \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array} \xrightarrow{s_3} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}.$$

Proposition (Assez délicat)**.** *Si $w = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$ est réduit alors dans $w \cdot \emptyset_{\mathsf{c}}$ à chaque étape on n'enlève jamais de nœud.*

Remarque. Les partitions de $\widetilde{\mathfrak{S}}_e \cdot \emptyset_{\mathsf{c}}$ sont les *e-cœurs*.

Remarque. L'application $\widetilde{\mathfrak{S}}_e \to \widetilde{\mathfrak{S}}_e \cdot \emptyset_{\mathsf{c}}$ n'est pas bijective, par exemple $s_1 \cdot \emptyset_0 = \emptyset_0 = 1 \cdot \emptyset_0$.

5 Ordre de Bruhat dans le groupe symétrique affine

$\widetilde{\mathfrak{S}}_e \curvearrowright \{(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(e-1)}) : \lambda^{(c)}$ est de charge $c\}$.

Exemple. Action de $w = s_2 s_1 s_3 s_0$ sur $\underline{\emptyset} := (\emptyset_0, \emptyset_1, \emptyset_2, \emptyset_3)$.

$$\begin{array}{ccccccccc} \emptyset_0 & & \boxed{0} & & \begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 3\\\hline\end{array} & & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} & & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&2\\\hline 3\\\cline{1-1} 2\\\cline{1-1}\end{array}\\ \emptyset_1 & \xrightarrow{s_0} & \emptyset_1 & \xrightarrow{s_3} & \emptyset_1 & \xrightarrow{s_1} & \boxed{1} & \xrightarrow{s_2} & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array}\\ \emptyset_2 & & \emptyset_2 & & \emptyset_2 & & \emptyset_2 & & \boxed{2}\\ \emptyset_3 & & \emptyset_3 & & \boxed{3} & & \boxed{3} & & \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 2\\\hline\end{array} \end{array}$$

Théorème (Lascoux, Deodhar, Jacon–Lecouvey)**.** *$w, w' \in \widetilde{\mathfrak{S}}_e$, $(\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(e-1)}) = w \cdot \underline{\emptyset}$, $(\lambda'^{(0)}, \dots, \lambda'^{(e-1)}) = w' \cdot \underline{\emptyset}$. On a :*

$$w \trianglelefteq w' \iff \mathcal{Y}(\lambda^{(c)}) \subseteq \mathcal{Y}(\lambda'^{(c)}) \text{ pour tout } c \in \{0, \dots, e-1\}.$$

Exemple. Avec $w' = s_2 s_3 s_0$ on a $w' \trianglelefteq w$ (le w précédent) et :

$$\begin{array}{ccccccc}
\emptyset_0 & & \boxed{0} & & \begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 3\\\hline\end{array} & & \begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 3\\\hline 2\\\hline\end{array}\\
\emptyset_1 & \xrightarrow{s_0} & \emptyset_1 & \xrightarrow{s_3} & \emptyset_1 & \xrightarrow{s_2} & \emptyset_1\\
\emptyset_2 & & \emptyset_2 & & \emptyset_2 & & \boxed{2}\\
\emptyset_3 & & \emptyset_3 & & \boxed{3} & & \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 2\\\hline\end{array}
\end{array}$$

Remarque. Les éléments de $\widetilde{\mathfrak{S}}_e \cdot \underline{\emptyset}$ sont les $(e, \underline{c})$-cœurs de Jacon–Lecouvey, où $\underline{c} = (0, 1, \dots, e-1)$.

6 Construction inductive composante par composante

Si $\underline{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(e-1)}) = w \cdot \underline{\emptyset}$, via une expression réduite le calcul de $\underline{\lambda}$ nécessite $e\ell(w)$ opérations (avec $\ell(w)$ arbitrairement grand). Via nos abaques, on se ramène à e^2 opérations. On veut encore diminuer ce nombre.

Proposition. *Soit A_c l'abaque de $\lambda^{(c)}$. (On rappelle que $A_0 = \bigsqcup_{i=1}^{e} (w(i) + e\mathbb{Z}_{<0})$.) Si $c \geq 1$ alors :*

$$A_c = A_{c-1} \sqcup \{w(c)\}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
A_c &= w(\mathbb{Z}_{\leq c})\\
&= w(\mathbb{Z}_{\leq c-1} \sqcup \{c\})\\
&= w(\mathbb{Z}_{\leq c-1} \sqcup \{w(c)\}) \text{ (d'après } (\clubsuit))\\
&= A_{c-1} \sqcup \{w(c)\}.
\end{aligned}$$

□

Le résultat suivant est obtenu en :

- généralisant la correspondance ajout/suppression de boites ↔ décalage de bille en ajout/suppression de ruban (i.e. suite connexe ajoutable de boites sur la frontière), de longueur h ↔ décalage de h d'une bille
- remarquant qu'ajouter une bille sur le plus petit trou revient à supprimer la première colonne de la partition.

Corollaire (R. 2025)**.** *Pour $c \in \{1, \dots, e-1\}$, $\lambda^{(c)}$ est obtenue de $\lambda^{(c-1)}$ par :*

1) *l'ajout du plus petit ruban tel que :*
   - *il ne possède qu'une boîte dans la première colonne,*
   - *il finit par une boîte de résidu $w(c) - 1 \pmod e$,*
2) *la suppression de la première colonne.*

Exemple. Avec $w = s_2 s_1 s_3 s_0$ on a $w = [-2, 1, 4, 7]$. On a $\lambda^{(0)} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2\\\hline 3 \\\cline{1-1} 2 \\\cline{1-1}\end{array}$. (on

— Pour $\lambda^{(1)}$ on rajoute d'abord le plus petit ruban avec une unique boîte dans la première colonne et finissant en résidu $w(1) - 1 = 1 - 1 = -3 = 1 \pmod 4$. On obtient $\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 3 \\ 2 \\ *(red) 1 \end{ytableau}$, et on supprime la première colonne pour obtenir $\lambda^{(1)} = \begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau}$.

— Pour $\lambda^{(2)}$ le ruban finit en résidu $w(2) - 1 = 1 - 1 = 0$. On obtient $\begin{ytableau} 1 & 2 \\ *(red) 0 \end{ytableau}$, et on supprime la première colonne pour obtenir $\lambda^{(2)} = \begin{ytableau} 2 \end{ytableau}$.

— Pour $\lambda^{(3)}$ le ruban finit en résidu $w(3) - 1 = 4 - 1 = 3$. On obtient $\begin{ytableau} 2 & *(red) 3 \\ 1 & 2 \end{ytableau}$, et on supprime la première colonne pour obtenir $\lambda^{(3)} = \begin{ytableau} 3 \\ 2 \end{ytableau}$.