

# Bifurcations de l'équation de Vlasov

J. Barré<sup>(1)</sup>, D. Métivier<sup>(2)</sup>, Y.Y. Yamaguchi<sup>(3)</sup>

<sup>1</sup>IDP

<sup>2</sup>Los Alamos National Laboratory, USA

<sup>3</sup>Kyoto University, Japan

June 13, 2018

# L'équation de Vlasov

$f(x, v, t)$  = densité de particules en position et vitesse.  $\rho(x, t)$  = densité en position. Equation de Vlasov :

$$\partial_t f + v \partial_x f - \partial_x \Phi \partial_v f = 0$$

$$\Phi(x, t) = \int V(x - y) \rho(y, t) dy, \quad \rho(x, t) = \int f(x, v, t) dv$$

$V$  = potentiel d'interaction.  $\Phi$  = potentiel créé par la distribution de particules.

Equation de Vlasov = équation de transport dans le potentiel  $\Phi$ .

Dans la suite, domaine spatial :  $\mathbb{R}^d$  ou  $[0, 2\pi]$ .

# L'équation de Vlasov, où et pourquoi ?

- ▶ Physique des plasmas (années 30); potentiel = Coulomb.
- ▶ Gravitation (galaxies par ex.; années 10); potentiel = Newton
- ▶ Laser à électrons libres
- ▶ Physique des accélérateurs
- ▶ Optique non linéaire
- ▶ ...

**Pourquoi ?** Eq. de Vlasov apparaît dès que les forces agissant sur les particules sont dominées par le champ moyen, global, et pas par les "collisions".

## Questions

- Démontrer la validité de l'eq. de Vlasov à partir de descriptions microscopiques
- Existence, unicité, régularité des solutions.
- Comprendre qualitativement la dynamique : solutions stationnaires, stabilité, **bifurcations**.

On perturbe une solution stationnaire *faiblement instable*, *que se passe-t-il* ?

*Pas de théorème dans ce qui suit... Développements asymptotiques formels et simulations.*

## Bifurcations : une motivation astrophysique

Instabilité d'orbites radiales : une famille de solutions stationnaires de l'éq. de Vlasov-Newton, à symétrie sphérique, dépendant d'un paramètre.

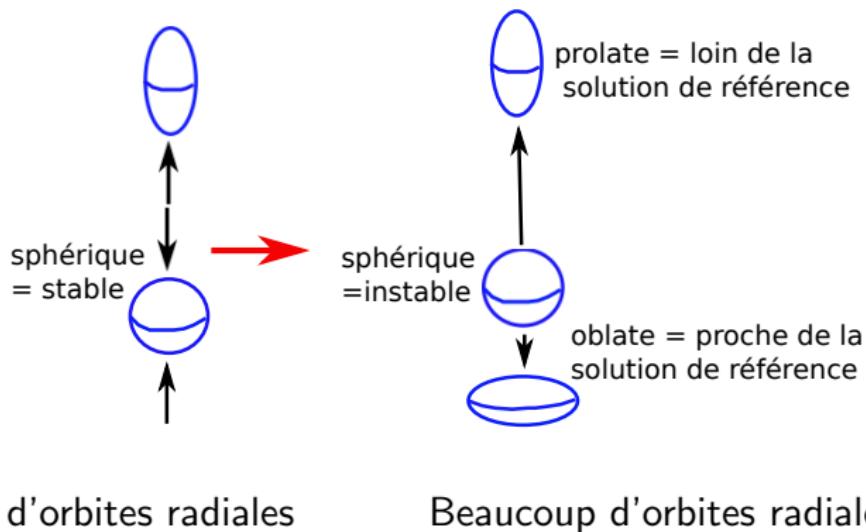
Peu d'étoiles à petit moment angulaire → stable

Beaucoup d'étoiles à petit moment angulaire → instable, valeur propre réelle.

*Que se passe-t-il lorsque l'instabilité se développe ?* Supposée avoir un rôle dans la détermination de la forme de certaines galaxies.

# Bifurcations : une motivation astrophysique

Scenario (partiel) d'après Palmer et al. (1990):



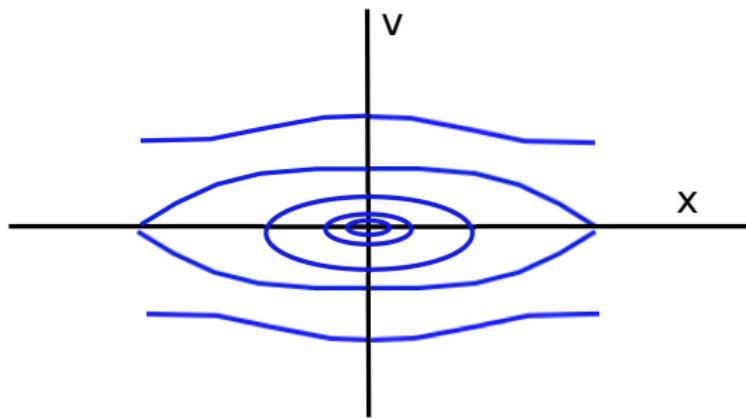
*Peut-on expliquer cela? Quantifier le sens de "proche"? A quel point est-ce général ?*

## Un modèle simple : potentiel en cosinus

$x \in [0, 2\pi]$ , périodique; interaction  $V(x) = -\cos x$

$$\Phi(x, t) = - \int \cos(x - y) \rho(y, t) dy = -M(t) \cos(x - \varphi(t))$$

$M$  = "magnétisation", mesure l'intensité du potentiel. Trajectoires des particules = trajectoires d'un pendule simple.



## Exemple numérique

On considère une famille à un paramètre  $F_\mu(x, v)$  d'états stationnaires de l'équation de Vlasov, potentiel en  $-\cos$ .

$\mu < \mu_c$ :  $F_\mu$  est linéairement stable.

$\mu > \mu_c$ :  $F_\mu$  linéairement instable.

Simulations :  $\mu > \mu_c$ , proche de la bifurcation; 2 conditions initiales :  $F_\mu + \epsilon$  et  $F_\mu - \epsilon$

Video 1: Perturbation  $+\epsilon$

Video 2: Perturbation  $-\epsilon$

→ On retrouve la dépendance en la condition initiale; la solution "proche" et la solution "lointaine" ...

→ Explication ?

## Plan de la suite

- ▶ A propos de l'équation de Vlasov : structure Hamiltonienne dégénérée, quantités conservées, états stationnaires et stabilité.
- ▶ A propos des bifurcations : généralités, exemples de bifurcation pour des systèmes Hamiltoniens.
- ▶ Description d'une bifurcation de l'équation de Vlasov.

## Structure Hamiltonienne canonique, dimension finie

Hamiltonien :  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = J \cdot \nabla H, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

**Exemple :**  $H = v^2/2 + V(x)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\nabla V(x) \end{aligned}$$

# Structure Hamiltonienne, équation de Vlasov

$z \in \mathbb{R}^{2n}$  devient  $f \in \mathcal{M} = C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

Matrice  $J$  devient opérateur  $\mathcal{J}_f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$

$$\mathcal{J}_f(g)(x, v) = -[f, g](x, v) = \partial_x f \partial_v g - \partial_v f \partial_x g$$

Le Hamiltonien

$$\mathcal{H}[f] = \int \frac{v^2}{2} f \, dx dv + \frac{1}{2} \iint f(x, v) V(x - x') f(x', v') dx dv dx' dv'$$

Equation de Vlasov :

$$\partial_t f = \mathcal{J}_f \left( \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta f} \right)$$

**Remarques :** l'opérateur  $\mathcal{J}$  ici dépend du point  $f \in \mathcal{M}$ , et  $\text{Ker } \mathcal{J}_f \neq \{0\}$ .

→ structure Hamiltonienne non-canonical

## Quantités conservées

- Celles qui viennent du système de particules sous-jacent : énergie, quantité de mouvement, moment angulaire...

$$\mathcal{H}[f] = \int \frac{v^2}{2} f \, dx dv + \frac{1}{2} \iint f(x, v) V(x - x') f(x', v') dx dv dx' dv'$$

- Celles qui viennent de la structure Hamiltonienne "dégénérée", les "Casimirs" :

Pour toute fonction  $\varphi$  ,  $C_\varphi[f] = \int \varphi(f(x, v, t)) dx \, dv = \text{cste}$

ie : les volumes des ensembles de niveau de  $f$  sont conservés.

# Etats stationnaires

Equation de Vlasov :

$$\partial_t f + v \partial_x f - \partial_x \Phi \partial_v f = 0$$

$f(x, v) = F(v^2/2 + \Phi(x))$  est un état stationnaire, pour tout  $F$ .  
→ beaucoup d'états stationnaires !

**Exemple** : Cas périodique,  $f(x, v) = f_0(v)$ ,  $\Phi = 0$  : Etat stationnaire homogène en espace, pour tout  $f_0$ .

**Remarque** : les états stationnaires avec potentiel non trivial ne sont pas aussi simples à construire.

On peut obtenir des états stationnaires comme minima de fonctionnelles conservées :

$$\mathcal{H}[f] + \int \varphi(f(x, v)) dx \, dv \rightarrow \min$$

# Stabilité des états stationnaires

Deux méthodes principales :

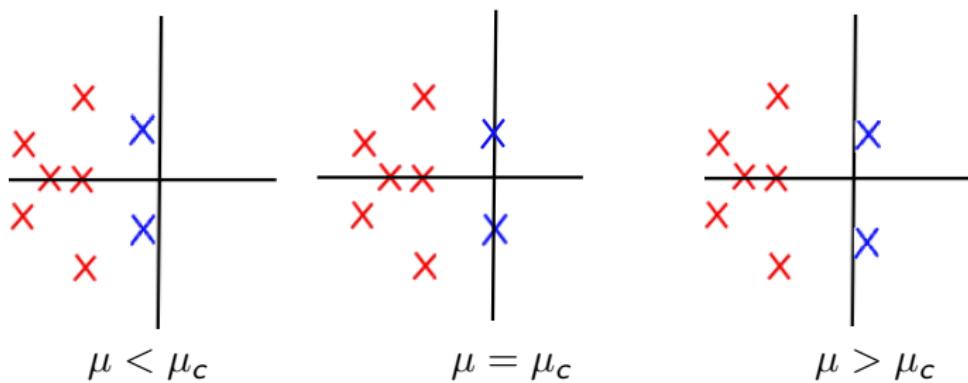
- ▶ Linéariser, puis essayer de contrôler les termes non linéaires.  
NB : souvent pour des états stationnaires **homogènes**,  $f_0(v)$ .  
Landau 1946 : amortissement Landau (calcul linéaire formel).  
Mouhot-Villani 2009 : stabilité non linéaire; Masmoudi, Bedrossian...
- ▶ Utiliser les quantités conservées.  
NB : souvent pour des états stationnaires **non homogènes**,  $f_0(x, v)$ .  
Antonov, Guo, Rein, Lemou, Méhats, Raphaël...

On va s'intéresser aux états stationnaires (légèrement) instables.

# Bifurcations : introduction

Soit un système dynamique  $\dot{x} = F(x; \mu)$  dépendant d'un paramètre.

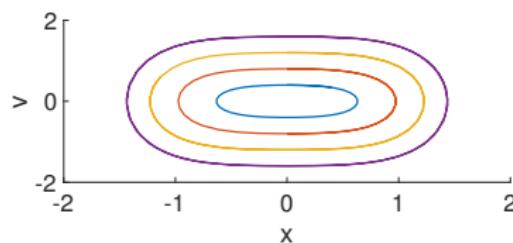
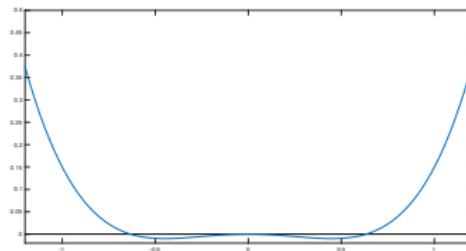
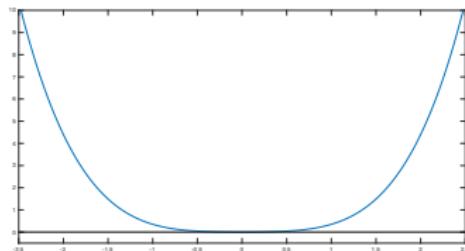
- Bifurcation pour un certain  $\mu_c$  si cela correspond à un changement qualitatif de la dynamique.
- Exemple : une famille de points fixes qui change de stabilité pour  $\mu = \mu_c$ . Spectre du linéarisé :



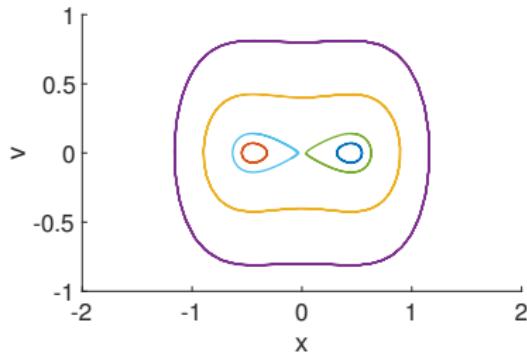
- Idées cruciales : **universalité, dynamique réduite** en petite dimension

# Bifurcations et systèmes Hamiltoniens, 1

$$\text{Potentiel } V(x) = -\mu \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$



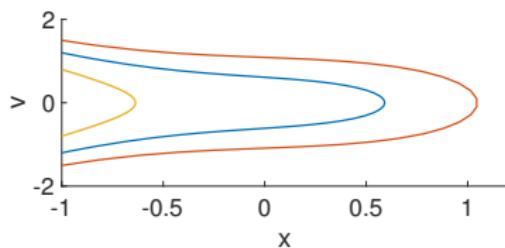
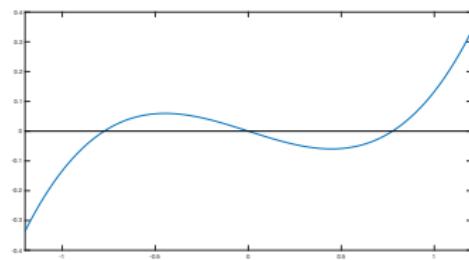
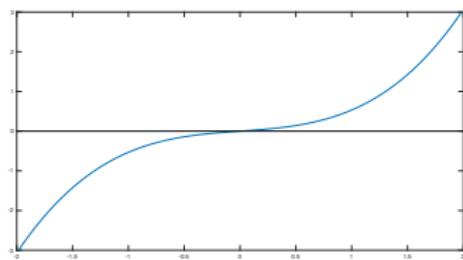
$$\mu = -0.2$$



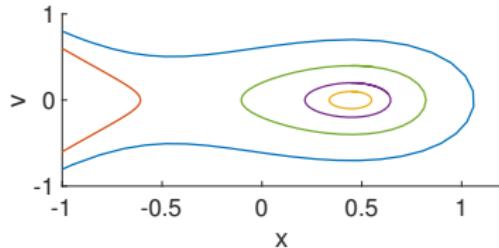
$$\mu = 0.2$$

# Bifurcations et systèmes Hamiltoniens, 2

Potentiel  $V(x) = -\mu x + \frac{x^3}{3}$



$$\mu = -0.2$$



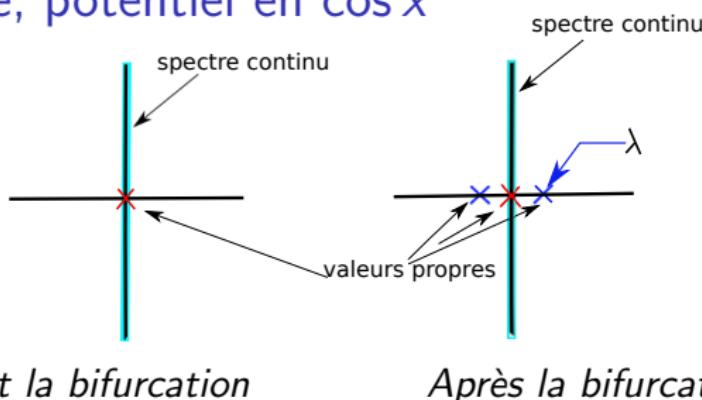
$$\mu = 0.2$$

# Bifurcations et équation de Vlasov

- A peu près compris par les physiciens pour les bifurcations d'états **homogènes**. Par exemple  $F_\beta(x, v) \propto e^{-\beta v^2/2}$ .
- Un problème de maths difficile : aucun théorème à ma connaissance.
- Bifurcation à partir d'un état non homogène avec valeur propre réelle = problème fondamentalement différent. Plus simple ?

Je vais l'expliquer pour le modèle simplifié avec potentiel en cos (rappel: espoir = universalité !)

# Calcul linéaire, potentiel en $\cos x$



- Valeur propre instable réelle.
- Au point de bifurcation, l'opérateur linéarisé a une structure de bloc de Jordan de taille 3 :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ on cherche une description réduite en 3D.

# Hamiltonien réduit 3D

**But :** Obtenir une description réduite de la dynamique, en conservant la structure Hamiltonienne.

**Idée générale :**

- Au point de bifurcation, l'espace caractéristique associé au bloc de Jordan est de taille 3; on l'appelle  $E$ .
- On restreint la structure de Poisson à  $E$ .
- On restreint le Hamiltonien à  $E$ .

## Résultats

Après changement de variables,  $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$  :

Operateur de Poisson  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

NB : structure Hamiltonienne non canonique.  $Z_3$  = quantité conservée type "Casimir", trace des Casimirs de l'équation de Vlasov.

Hamiltonien  $H = \frac{Z_2^2}{2} - Z_3 Z_1 - \frac{\nu a}{2} Z_1^2 - \frac{r}{6} Z_1^3$

# Dynamique réduite

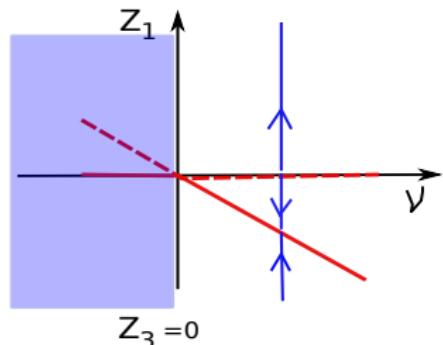
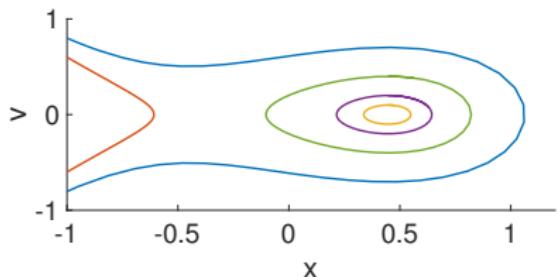


Diagramme de bifurcation



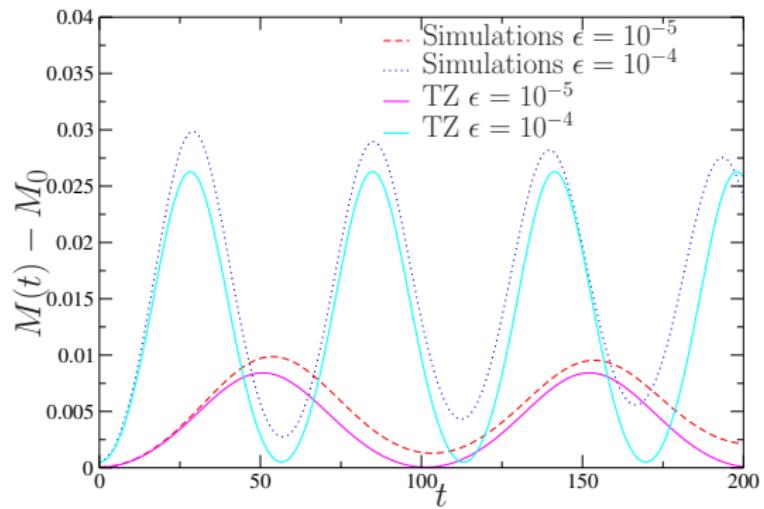
Diag. de phase,  $\nu = \mu - \mu_c > 0$

- Explique la dépendance en la condition initiale (petites oscillations vs instabilité violente)
- Le nouvel état stationnaire "proche" de l'état de référence est bien décrit.
- Non valable a priori avant la bifurcation

# Conclusions

- ▶ Universalité du scenario ? Est-ce qu'il s'applique effectivement à l'instabilité d'orbite radiale ? Autres exemples ?
- ▶ Aller au delà des calculs heuristiques et numériques... ?
- ▶ Dynamique qualitative de l'équation de Vlasov, en particulier ses bifurcations : encore beaucoup à comprendre !

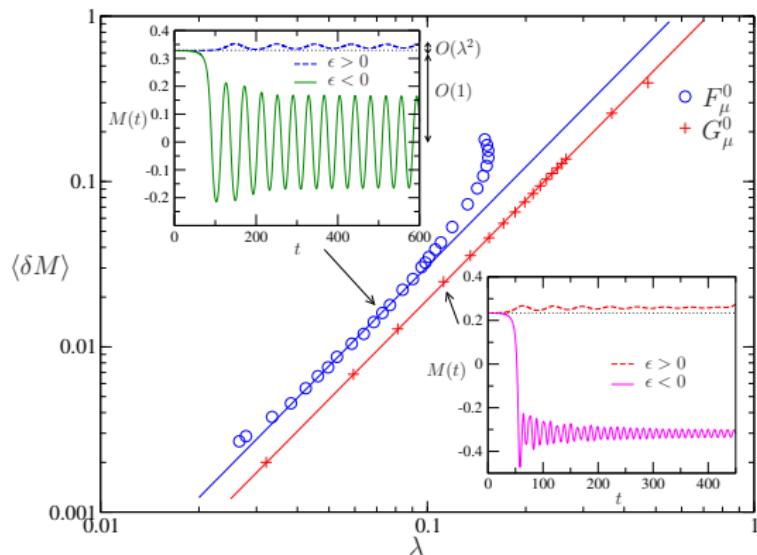
# Comparaisons 1



## Comparaisons 2

Distance du nouvel état stationnaire stable à l'état de référence

Plot:  $M^\infty - M_0$  vs  $\lambda$



→ confirme le scaling  $A_{\text{stat}} \propto \lambda^2$

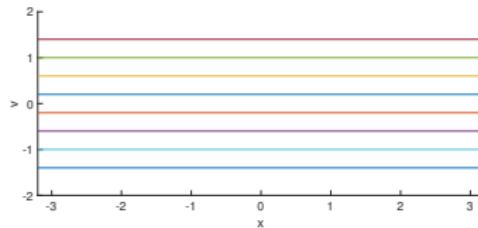
# Bifurcations Vlasov, états stationnaires homogènes

Potentiel en cos :

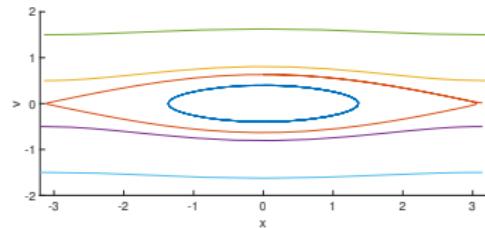
$$\Phi(x, t) = - \int \cos(x - y) \rho(y, t) dy = -M(t) \cos(x - \varphi(t))$$

Famille d'états stationnaires homogènes:  $F_\beta(v) \propto e^{-\beta v^2/2}$ , stable si  $\beta \leq 2$ , instable si  $\beta > 2$ .

Video: cas faiblement instable. Difficulté = résonance



potentiel = 0



potentiel =  $-\varepsilon \cos x$

## Bifurcations Vlasov, états stationnaires non homogènes

Etat stationnaire homogène → les particules de fréquence proche de 0 sont très perturbées.

Etat stationnaire non homogène → très peu de particules à fréquence nulle !

