Cohomologie L^1 des groupes d'Heisenberg

Pierre Pansu, avec A. Baldi, B. Franchi et F. Tripaldi

14 juin 2018

Inégalité de Sobolev euclidienne

Soit $1 \leq p < n$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{n}$. Si u fonction lisse à support compact sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\|u\|_q \leq C(n,p,q)\|du\|_p. \qquad (Sobol_{p,q})$$

Inégalité de Sobolev euclidienne

Soit $1 \leq p < n$, $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{n}$. Si u fonction lisse à support compact sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\|u\|_q \leq C(n,p,q)\|du\|_p. \qquad (Sobol_{p,q})$$

La plus importante des $(Sobol_{p,q})$, c'est celle pour $p = 1$,

- Elle entraîne toutes les autres.
- Elle équivaut à l'inégalité isopérimétrique.

Inégalité de Sobolev euclidienne

Soit $1 \leq p < n$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{n}$. Si u fonction lisse à support compact sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\|u\|_q \leq C(n,p,q)\|du\|_p. \qquad (Sobol_{p,q})$$

La plus importante des $(Sobol_{p,q})$, c'est celle pour $p = 1$,

- Elle entraîne toutes les autres.
- Elle équivaut à l'inégalité isopérimétrique.

$(Sobol_{p,q})$ a une version discrète sur $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$: tout 1-cocycle c à support fini possède une primitive u telle que

$$\|u\|_q \leq C'(n,p,q)\|c\|_p.$$

Inégalité de Sobolev euclidienne

Soit $1 \leq p < n$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{n}$. Si u fonction lisse à support compact sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\|u\|_q \leq C(n,p,q)\|du\|_p. \qquad (Sobol_{p,q})$$

La plus importante des $(Sobol_{p,q})$, c'est celle pour $p = 1$,

- Elle entraîne toutes les autres.
- Elle équivaut à l'inégalité isopérimétrique.

$(Sobol_{p,q})$ a une version discrète sur $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$: tout 1-cocycle c à support fini possède une primitive u telle que

$$\|u\|_q \leq C'(n,p,q)\|c\|_p.$$

On étudie une généralisation, à tendance topologique, aux dimensions supérieures.

Définition

X complexe simplicial. Est-ce que tout cocycle ℓ^p est le cobord d'une cochaîne ℓ^q ?

$$\ell^{q,p}H^k(X) = \{k\text{-cocycles } \ell^p\}/d\{k-1\text{-cochaînes } \ell^q\}.$$

Si X est fini, c'est un invariant topologique. Si X est infini, c'est un invariant de quasiisométrie. Donne lieu à des invariants numériques des groupes discrets.

Définition

X complexe simplicial. Est-ce que tout cocycle ℓ^p est le cobord d'une cochaîne ℓ^q ?

$$\ell^{q,p}H^k(X) = \{k\text{-cocycles } \ell^p\}/d\{k-1\text{-cochaînes } \ell^q\}.$$

Si X est fini, c'est un invariant topologique. Si X est infini, c'est un invariant de quasiisométrie. Donne lieu à des invariants numériques des groupes discrets.

Exemple. $X =$ droite pavée en intervalles égaux. Alors $\ell^{q,p}H^0(X) = 0$ sauf $\ell^{q,\infty}H^0(X) = \mathbb{R}$, $\ell^{\infty,1}H^1(X) = 0$, tous les autres $\ell^{q,p}H^1(X) \neq 0$.

Définition

X complexe simplicial. Est-ce que tout cocycle ℓ^p est le cobord d'une cochaîne ℓ^q ?

$$\ell^{q,p}H^k(X) = \{k\text{-cocycles } \ell^p\}/d\{k-1\text{-cochaînes } \ell^q\}.$$

Si X est fini, c'est un invariant topologique. Si X est infini, c'est un invariant de quasiisométrie. Donne lieu à des invariants numériques des groupes discrets.

Exemple. $X =$ droite pavée en intervalles égaux. Alors $\ell^{q,p}H^0(X) = 0$ sauf $\ell^{q,\infty}H^0(X) = \mathbb{R}$, $\ell^{\infty,1}H^1(X) = 0$, tous les autres $\ell^{q,p}H^1(X) \neq 0$.

Exemple. $X =$ plan pavé en triangles. Alors $\ell^{q,p}H^1(X) = 0$ si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} \geq \dfrac{1}{2}$. Pour les 1-cocycles à support fini, c'est l'inégalité de Sobolev discrète. En général,

- passage du discret au continu,
- argument d'analyse dans le continu.

Définition

X variété riemannienne.

$$L^{q,p}H^k(X) = \{k\text{-formes fermées } L^p\}/d\{k-1\text{-formes } L^q\ \omega \text{ telles que } d\omega \in L^p\}.$$

Propriété. Si X est triangulée à géométrie bornée, $L^{q,p}H^k(X) = \ell^{q,p}H^k(X)$.

Définition

X variété riemannienne.

$$L^{q,p}H^k(X) = \{k\text{-formes fermées } L^p\}/d\{k-1\text{-formes } L^q\ \omega \text{ telles que } d\omega \in L^p\}.$$

Propriété. Si X est triangulée à géométrie bornée, $L^{q,p}H^k(X) = \ell^{q,p}H^k(X)$.

Exemple. $X = \mathbb{R}^n$. Alors $L^{q,p}H^k(X) = 0$ si $1 < p \leq q < \infty$ et $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{n}$.

Démonstration. Soit $\Delta = d^*d + dd^*$. Alors Δ a un inverse pseudodifferentiel qui commute avec d. $T = d^*\Delta^{-1}$ a un noyau homogène de degré $1-n$, donc est borné $L^p \to L^q$ dès que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{n}$ (Calderon-Zygmund 1952). Enfin, $1 = dT + Td$.

Définition

X variété riemannienne.

$$L^{q,p}H^k(X) = \{k\text{-formes fermées } L^p\}/d\{k-1\text{-formes } L^q\ \omega \text{ telles que } d\omega \in L^p\}.$$

Propriété. Si X est triangulée à géométrie bornée, $L^{q,p}H^k(X) = \ell^{q,p}H^k(X)$.

Exemple. $X = \mathbb{R}^n$. Alors $L^{q,p}H^k(X) = 0$ si $1 < p \leq q < \infty$ et $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{n}$.

Démonstration. Soit $\Delta = d^*d + dd^*$. Alors Δ a un inverse pseudodifferentiel qui commute avec d. $T = d^*\Delta^{-1}$ a un noyau homogène de degré $1-n$, donc est borné $L^p \to L^q$ dès que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{n}$ (Calderon-Zygmund 1952). Enfin, $1 = dT + Td$.

Cas $p = 1$. Sur les n-formes, $d^*\Delta^{-1}$ n'est pas borné de L^1 dans $L^{n/(n-1)}$. Sinon, par dualité, l'inégalité de Sobolev ($Sobol_{\infty,n}$) serait vraie. Or c'est faux : si $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ est n-parabolique.

Théorème (Bourgain-Brezis-Mironescu 2004)

Soit ω une $n-1$-forme ***fermée*** *à support compact sur $\mathbb{R}^n$. Alors pour toute 1-forme α sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\nabla\alpha \in L^n$,*

$$|\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \wedge \omega| \leq C\,\|\omega\|_1 \|\nabla\alpha\|_n.$$

Théorème (Bourgain-Brezis-Mironescu 2004)

Soit ω une $n-1$-forme ***fermée*** *à support compact sur $\mathbb{R}^n$. Alors pour toute 1-forme α sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\nabla\alpha \in L^n$,*

$$|\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \wedge \omega| \leq C\,\|\omega\|_1 \|\nabla\alpha\|_n.$$

Corollaire

Si ϕ à support compact satisfait $d^*\phi = 0$ et $d\phi = \omega$, alors $\|\phi\|_{n/(n-1)} \leq C\,\|\omega\|_1$.

Théorème (Bourgain-Brezis-Mironescu 2004)

Soit ω une $n-1$-forme ***fermée*** *à support compact sur $\mathbb{R}^n$. Alors pour toute 1-forme α sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\nabla\alpha \in L^n$,*

$$|\int_{\mathbb{R}^n} \alpha\wedge\omega| \leq C\,\|\omega\|_1 \|\nabla\alpha\|_n.$$

Corollaire

Si ϕ à support compact satisfait $d^*\phi = 0$ et $d\phi = \omega$, alors $\|\phi\|_{n/(n-1)} \leq C\,\|\omega\|_1$.

Les *moyennes* d'une k-forme L^1 ω, ce sont les $\int_{\mathbb{R}^n}\beta\wedge\omega$, β à coefficients constants.

Corollaire

$d^*\Delta^{-1} : L^1 \to L^{n/(n-1)}$ est borné sur les $n-1$-formes ***fermées de moyennes nulles****.*

Proposition

Soit ω une $n-1$-forme fermée L^1 sur $\mathbb{R}^n$. Alors ω est de moyennes nulles, i.e. pour toute 1-forme β à coefficients constants, $\int_{\mathbb{R}^n} \beta \wedge \omega = 0$.

En effet, $\beta = d\gamma$ où γ est un polynôme de degré 1.

$$\begin{aligned}\int \chi_r \beta \wedge \omega &= -\int \gamma d\chi_r \wedge \omega + \int d(\chi_r \gamma \omega)\\ &= -\int_{B(2r)\setminus B(r)} \gamma d\chi_r \wedge \omega\\ &\leq C \int_{B(2r)\setminus B(r)} |\omega|\end{aligned}$$

tend vers 0. Donc $\int \beta \wedge \omega = 0$.

Proposition

Soit ω une $n-1$-forme fermée L^1 sur $\mathbb{R}^n$. Alors ω est de moyennes nulles, i.e. pour toute 1-forme β à coefficients constants, $\int_{\mathbb{R}^n} \beta \wedge \omega = 0$.

En effet, $\beta = d\gamma$ où γ est un polynôme de degré 1.

$$\begin{aligned}\int \chi_r \beta \wedge \omega &= -\int \gamma d\chi_r \wedge \omega + \int d(\chi_r \gamma \omega) \\ &= -\int_{B(2r)\setminus B(r)} \gamma d\chi_r \wedge \omega \\ &\leq C \int_{B(2r)\setminus B(r)} |\omega|\end{aligned}$$

tend vers 0. Donc $\int \beta \wedge \omega = 0$.

Corollaire (Bourgain-Brezis 2007)

$L^{n/(n-1),1} H^{n-1}(\mathbb{R}^n) = 0$.

Proposition (Lanzani-Stein 2005)

L'inégalité de Bourgain-Brezis-Mironescu pour les formes fermées ω à support compact

$$|\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \wedge \omega| \leq C\,\|\omega\|_1 \|\nabla\alpha\|_n.$$

est vraie en tout degré $k \leq n-1$ (mais pas en degré n).

Proposition (Lanzani-Stein 2005)

L'inégalité de Bourgain-Brezis-Mironescu pour les formes fermées ω à support compact

$$|\int_{\mathbb{R}^n} \alpha\wedge\omega| \leq C\,\|\omega\|_1\|\nabla\alpha\|_n.$$

est vraie en tout degré $k\leq n-1$ (mais pas en degré n).

En effet, chaque composante de ω est une composante d'une $n-1$-forme fermée à support compact $\omega\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{n-1-h}}$.

Proposition (Lanzani-Stein 2005)

L'inégalité de Bourgain-Brezis-Mironescu pour les formes fermées ω à support compact

$$|\int_{\mathbb{R}^n} \alpha\wedge\omega| \leq C\,\|\omega\|_1\|\nabla\alpha\|_n.$$

est vraie en tout degré $k\leq n-1$ (mais pas en degré n).

En effet, chaque composante de ω est une composante d'une $n-1$-forme fermée à support compact $\omega\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{n-1-h}}$.

Corollaire

$L^{n/(n-1),1}H^k(\mathbb{R}^n)=0$ pour tout $k=0,\ldots,n-1$. En revanche, $L^{n/(n-1),1}H^n(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparé.

Démonstration de l'inégalité BBM (d'après van Schaftingen).

Démonstration de l'inégalité BBM (d'après van Schaftingen).

On peut approximer ω par des formes Poincaré-duales à des courbes fermées γ, cela ramène à

$$|\int_\gamma \alpha| \leq C\,\ell(\gamma)\|\nabla\alpha\|_n,$$

pour $\alpha = u\,dx_1$.

Démonstration de l'inégalité BBM (d'après van Schaftingen).

On peut approximer ω par des formes Poincaré-duales à des courbes fermées γ, cela ramène à

$$|\int_{\gamma}\alpha| \leq C\,\ell(\gamma)\|\nabla\alpha\|_n,$$

pour $\alpha = u\,dx_1$.

On projette le long des hyperplans parallèles $\Pi = \{x_1 = t\}$. Comme $u \in C^{(n-1)/n}(\Pi)$ et $\gamma \cap \Pi = \sum_{i=1}^m x_i - y_i$,

$$|u(x_i) - u(y_i)| \leq C\,\|\nabla\alpha\|_{L^n(\Pi)}|x_i - y_i|^{1/n}.$$

Démonstration de l'inégalité BBM (d'après van Schaftingen).

On peut approximer ω par des formes Poincaré-duales à des courbes fermées γ, cela ramène à

$$|\int_\gamma \alpha| \leq C\,\ell(\gamma)\|\nabla\alpha\|_n,$$

pour $\alpha = u\,dx_1$.

On projette le long des hyperplans parallèles $\Pi = \{x_1 = t\}$. Comme $u \in C^{(n-1)/n}(\Pi)$ et $\gamma \cap \Pi = \sum_{i=1}^m x_i - y_i$,

$$|u(x_i) - u(y_i)| \leq C\,\|\nabla\alpha\|_{L^n(\Pi)}|x_i - y_i|^{1/n}.$$

Par Hölder,

$$\sum_{i=1}^m |u(x_i) - u(y_i)| \leq C\,\|\nabla\alpha\|_{L^n(\Pi)}\ell(\gamma)^{1/n}m^{(n-1)/n}.$$

Démonstration de l'inégalité BBM (d'après van Schaftingen).

On peut approximer ω par des formes Poincaré-duales à des courbes fermées γ, cela ramène à

$$|\int_\gamma \alpha| \leq C\,\ell(\gamma)\|\nabla\alpha\|_n,$$

pour $\alpha = u\,dx_1$.

On projette le long des hyperplans parallèles $\Pi = \{x_1 = t\}$. Comme $u \in C^{(n-1)/n}(\Pi)$ et $\gamma \cap \Pi = \sum_{i=1}^m x_i - y_i$,

$$|u(x_i) - u(y_i)| \leq C\,\|\nabla\alpha\|_{L^n(\Pi)}|x_i - y_i|^{1/n}.$$

Par Hölder,

$$\sum_{i=1}^m |u(x_i) - u(y_i)| \leq C\,\|\nabla\alpha\|_{L^n(\Pi)}\ell(\gamma)^{1/n}m^{(n-1)/n}.$$

On intègre en x_1, puis Hölder, on obtient une majoration de $\int_\gamma \alpha$ par $\|\nabla\alpha\|_n$ et $\int_{\mathbb{R}} m(x_1)\,dx_1 \leq \ell(\gamma)$.

Le *groupe d'Heisenberg* $\mathbb{H}^n$ a pour algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, où $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^{2n}$ et $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2 = \mathbb{R}$ est symplectique. Il possède des automorphismes $\delta_\epsilon := \epsilon^i$ sur $\mathfrak{g}_i$ qui le rendent *autosimilaire*.

Le *groupe d'Heisenberg* $\mathbb{H}^n$ a pour algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, où $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^{2n}$ et $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2 = \mathbb{R}$ est symplectique. Il possède des automorphismes $\delta_\epsilon := \epsilon^i$ sur $\mathfrak{g}_i$ qui le rendent *autosimilaire*.

Théorème (Baldi-Franchi-Pansu-Tripaldi)

Soit $Q = 2n+2$. Alors $\ell^{q,p}H^k(\mathbb{H}^n) = 0$ dans les cas suivants :

- *Si $k \neq n$, $1 \leq p < Q$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq \frac{1}{Q}$.*
- *Si $k = n+1$, $1 \leq p < \frac{Q}{2}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq \frac{2}{Q}$.*

avec l'exception du cas où $k = 2n+1$ et $p = 1$.

Remarque (Pansu-Rumin). La réciproque est vraie : $\ell^{q,p}H^k(\mathbb{H}^n) \neq 0$ dans tous les autres cas.

1. Le laplacien sur les formes $dd^* + d^*d$ n'est pas homogène sous les δ_ϵ. En 1994, Rumin a introduit un complexe homotope au complexe des formes différentielles et homogène sous les δ_ϵ. Le laplacien correspondant est d'ordre 2 en degrés $k \neq n$, $n+1$ et d'ordre 4 en degrés $k = n$ et $n+1$.
2. Pour $p > 1$, la théorie des intégrales singulières s'étend aux groupes homogènes, Folland 1975.
3. La généralisation aux groupes homogènes du théorème de Bourgain-Brezis-Mironescu est due à Chanillo-Van Schaftingen 2008.
4. Les moyennes d'une forme L^1 d_R-fermée ω sont les intégrales $\int_{\mathbb{H}^n} \beta \wedge \omega$, β forme de Rumin invariante à gauche.
   Les moyennes passent au quotient $L^{Q/(Q-1),1}H^k(\mathbb{H}^n) \to \mathbb{R}$ (resp. $L^{Q/(Q-2),1}H^k(\mathbb{H}^n) \to \mathbb{R}$ en degré $k = n+1$).
   On montre que les moyennes de toutes les formes L^1 d_R-fermées de degrés $< 2n+1$ sont nulles.