|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Mathématiques - Cycle 3**  **Domaines** : 1 – 2 - 3  **Unité d’apprentissage** :  **Écriture binaire des nombres**  *« Compter les points »* |  | Compétences travaillées   * **Chercher** : s’engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des procédures déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle. * **Raisonner** : progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d’autrui. * **Justifier** ses affirmations et rechercher la validité des informations dont on dispose. * **Calculer** avec des nombres entiers. * **Communiquer** : utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et des notations adaptées pour décrire une situation. * **Expliquer** sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d’un autre et argumenter dans l’échange. |

|  |
| --- |
| Capacités / Connaissances requises   * Les nombres entiers * Les doubles * Addition des nombres entiers * Classement croissant / décroissant |

|  |  |
| --- | --- |
| Objectifs | |
| Séance 1 | * Découverte et manipulation des cartes à points |
| Séance 2 | * Manipulation des cartes à points. Compréhension de la logique des cartes. |
| Séance 3 | * Correspondance entre système binaire et système décimal : découverte et manipulation. * L’ordinateur : langage binaire et fonctionnement. |
| Séance 4 | * Langage binaire : mise en pratique (message secret) |
| Prolongements | * Langage binaire et division euclidienne, jeu des grilles |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Séance n°1**  Durée : 45’ | Objectif(s) : **Découverte et manipulation des cartes à points. Utilisation des cartes pour afficher une décomposition d’un nombre, unicité de la décomposition.** | | | |
| Déroulement | Objectif | Organisation | Consignes / Tâches | Matériel |
| **Étape 1 :**  10’ | Découverte du matériel | Classe | Chaque élève dispose de son jeu :  Questionnement de l’enseignant : « Qu’observez-vous ? », « À quoi peuvent servir ces cartes ?», « Quel est le *nombre de points sur les cartes ?* » | **1 jeu par élève de 5 cartes avec points: 1, 2, 4, 8 et 16**  **voir annexe 1 (avec différentes tailles de cartes)** |
| **Étape 2 :**  10’ | Entrainement pour l’affichage des décompositions et mise en place d’une organisation pour connaitre les cartes à prendre en compte | Travail classe entière  Un élève vient retourner les cartes au tableau, l’enseignant note au tableau les résultats obtenus. | Ces cartes peuvent servir à représenter des nombres.  *« Comment placer les cartes de telle sorte que* : » -> les élèves vont en déduire qu’il faut que la carte ne soit pas visible quand on ne veut pas compter les points.   * 5 points visibles 5 = 4 + 1   *« Puis-je écrire « 5 » de différentes façons ? »*  *« Non, il n’existe qu’une solution pour écrire « 5 » ».*   * 3 points visibles 3 = 2 + 1 * 19 points visibles 19 = 16 + 2 + 1 * 12 points visibles 12 = 8 + 4 * Afficher 6 = 4 + 2 * Afficher 7 = 4 + 2 + 1 * Afficher 15 = 8 + 4 + 2 + 1 * Afficher 21 = 16 + 4 + 1 * Afficher 28 = 16 + 8 + 4   **Dispositions observées :** les élèves s’orientent vers trois organisations de leurs cartes : soit les cartes utiles pour afficher un nombre sont juste devant eux et les cartes inutiles sont repoussées plus loin sur la table, soit les cartes sont toutes alignées et les cartes inutiles sont retournées face cachée, soit les cartes sont empilées pour ne conserver visibles que les cartes utiles.  **Commentaires :** L’organisation par retournement des cartes présente un intérêt pourl’apparition de l’algorithme de comptage en utilisant les cartes et aussi en lien avec la nécessité du 0 dans l’écriture en binaire. À ce stade, il ne s’agit pas d’écarter les autres procédures mais il s’agit de mettre cette organisation par retournement plus en valeur. |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Étape 3 :**  10’ | | Apparition des premières propriétés de cette écriture : unicité, plus grand nombre, plus petit nombre et nombre de nombres qu’il est possible d’afficher | | Individuel, binôme puis classe | | *Existe-t-il plusieurs moyens d’obtenir un nombre ?* **Non, un seul.**  *Quel est le plus gd nombre que tu peux obtenir avec 5 cartes ?* **31**  *Quel est le plus petit nombre ?* **0**  *Combien y-a-t-il de nombres affichables ?* **32 (avec le zéro)**  *Peut-on afficher tous les nombres entre le plus grand et le plus petit ?* **Oui, peut-être...**  **Nous allons essayer !**  **Commentaires :** le fait que 0 soit le plus petit nombre affichable est difficile à faire émerger, la disposition avec les cartes toutes retournées est une aide pour faire apparaître le 0. | | Cahier d’essai |
| **Étape 4 :**  15’ | |  | | en groupe puis mise en commun | | *« En groupe, vous allez écrire les nombres de 0 à 31 ».*  Chaque groupe dispose de deux feuilles l’une pour écrire les nombres de 0 à 15 et l’autre pour les nombres de 16 à 31. Ils s’organisent dans le groupe pour compléter les feuilles dans le temps imparti.  Mise en commun et comparaison de certaines des décompositions et des écritures (points ou écritures chiffrées).  Bilan pour la classe : Avec **seulement** ces **5** cartes, on a pu écrire les 32 nombres et chacun d’une seule manière.  **Commentaires :** les groupes adoptent diverses écritures (voir des exemples dans l’annexe 7). Certains reproduisent les cartes avec tous les points et d’autres écrivent les nombres représentés par les cartes. Le temps de 15 minutes est un peu court pour ceux qui dessinent les points.  Lors de cette phase, les élèves organisent, bien souvent, leurs décompositions par ordre décroissant des nombres à ajouter. | | Feuilles préparées / groupe  voir l’annexe 2 |
| **Séance n°2** - Durée : 45’ | | | Objectif(s) : **Manipulation des cartes à points. Compréhension de la logique des cartes.** | | | | | |
| Déroulement | Objectifs | | Organisation | | Consignes / Tâches | | Matériel | |
| **Étape 1 :**  5’ | Rappel : Mettre les cartes dans l’ordre | | Classe | | Rappel des nombres utilisés : 16 – 8 – 4 – 2 – 1 ou 1 – 2 – 4 – 8 – 16 : affichage au tableau des cartes à points pas nécessairement dans l’ordre et écriture chiffrées des nombres en dessous. Proposer éventuellement un exemple de décomposition : écrire 26.  *« Pourquoi choisir ces cartes ? »* Réponses attendues : ce sont les nombres de la dernière fois, ils permettent d’écrire tous les nombres de 0 à 31.  *« Que remarquez-vous sur ces nombres ? » Chacun est le double du suivant*  *« Comment organiser l’écriture des décompositions ? »*  Aboutir à la nécessité de les mettre dans l’ordre décroissant ou croissant, l’ordre décroissant étant celui qui apparaît le plus souvent dans la séance 1 et qui est utilisé pour l’écriture en binaire. | | 5 cartes individuelles à points / élève + 1 jeu pour le tableau | |
| **Étape 2 :**  10’ (recherche individuelle)  10’ (recherche en binôme)  15’ (mise en commun) | Nécessité de créer des cartes supplémentaires pour écrire des nombres plus grands en suivant les règles : la carte suivante représente le double de la précédente ou c’est la carte qui représente un de plus que le plus grand nombre que je peux écrire avec tous les cartes précédentes. | | Individuel, puis par 2 puis mise en commun | | *Proposer directement les deux questions : « comment écrire 57 ? Comment écrire 100 ? Vous avez le droit de créer des cartes, selon la logique des autres cartes. »*  Mise en commun : *« Pourquoi avez-vous ajouté les cartes* ***32*** *et* ***64****? »*  Bilan : Mettre en avant les deux propriétés : c’est le plus petit nombre qu’on ne peut pas obtenir (en posant la question ?) ; c’est le double de la plus grande des cartes qu’on a déjà.  Réponse :  57 = 32 + 16 + 8 + 1  100 = 64 + 32 + 4  *« Si j’ajoute la carte* ***32****, combien y-a-t-il de nombres affichables ? »*  le + gd -> 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63  le + pt -> 0  Il y a 63 nombres + le zéro, soit 64 nombres affichables.  Je ne peux pas afficher **64**.  Si je veux continuer, je dois donc ajouter **64.**  *« Si j’ajoute la carte* ***64****, combien y-a-t-il de nombres affichables ? »*  le + gd -> 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127  le + pt -> 0  Il y a 127 nombres affichables + le zéro, soit 128 nombres affichables.  Je ne peux pas afficher **128.**  Faire remarquer que pour compter, je pars du plus grand nombre placé à gauche, puis j’ajoute le plus grand nombre inférieur et ainsi de suite.  Ainsi les nombres sont placés de façon **décroissante.**  **Commentaires :** Pour débuter la mise en commun, il s’agit que les élèves aient terminé le travail sur le nombre 57. Il n’est pas nécessaire qu’ils aient fini le calcul avec 100.  Il est possible (notamment en 6ème de proposer uniquement d’écrire 100 sans passer par la proposition 57). Cela nécessite alors la création de deux cartes. | | Distribuer 3 cartes vierges « si besoin » | |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Séance n°3** - Durée : 45’ | | Objectif(s) : **Correspondance entre système binaire et système décimal : découverte et manipulation.** | | |
| Déroulement | Objectifs | Organisation | Consignes / Tâches | Matériel |
| **Étape 1 :**  20’ | Correspondance entre système binaire et système décimal : découverte et manipulation. | Groupes | **Jeu en groupes**  Chaque groupe reçoit un lot de cartes (de 1 à 64).  *« L’ordinateur m’a envoyé un code pour me faire deviner un nombre compris entre 1 et 100 :* ***1 1 0 0 1 »***  Écrire le nombre binaire au tableau et le lire aux élèves (un un zéro zéro un).  *Quel est ce nombre ? Pour proposer un nombre, vous devez utiliser les cartes.*  La proposition des élèves a la forme suivante : par exemple 38= 32 + 4+2.  L’enseignant écrit au tableau  38 = 32 + 4 + 2 -> **1 0 0 1 1 0**  L’enseignant dit : « ce n’est pas 38 l’ordinateur aurait codé « un zéro zéro un un zéro. » » Puis l’enseignant prend la proposition d’un autre groupe. Par exemple :  Sur le tableau est alors écrit  38 = 32 + 4 + 2 -> **1 0 0 1 1 0**  34 = 32 + 2 -> **1 0 0 0 1 0**  L’enseignant dit « ce n’est pas 34 l’ordinateur aurait codé « un zéro zéro zéro un zéro. » »  ATTENTION à bien aligner les nombres en binaire à droite.  Et ainsi de suite. De même prendre les propositions des autres groupes. L’organisation du tableau est cruciale (voir la photo).     * Si, par chance pour les élèves, la proposition est **25 = 16 + 8 + 1**   L’enseignant écrit au tableau  25 = 16 + 8 + 1 -> **1 1 0 0 1**  L’enseignant dit « OUI ! Gagné » et propose un nouveau code à faire deviner à la classe. | un lot de cartes avec les écritures chiffrées par groupe : **1, 2, 4, 8, 16, 32, 64**  voir en annexe 3  Tableau des correspondances système binaire / système décimal pour l’enseignant  voir en annexe 4 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | **Commentaires :** pour guider les élèves, l’enseignant pourra proposer quelques nombres judicieusement choisis : par exemple les nombres qui ne s’écrivent qu’avec un seul 1 et que des zéros (1,2,4,8, 16, 32 ou 64), puis éventuellement des nombres que ne s’écrivent qu’avec des 1 (1,3,7,15,31,63). Si les élèves sont toujours en difficulté, il pourra placer les cartes au-dessus des colonnes correspondantes. |  |
| **Étape 2 :**  15’ | Tâche de réinvestissement | individuel, puis  binôme, puis  classe. | **Réinvestissement**  Un travail en amont autour de jeux type « MasterMind » est une aide pour les élèves (voir annexe 8).  *« Je vous donne 3 nouveaux codes, à vous de me dire à quels nombres ils correspondent. »*  Continuer à disposer les résultats au tableau dans le tableau de résultats en langage binaire.  **1110111** -> 119  **1100011** -> 99  **1100110** -> 102  *« Je vous donne 3 nombres, à vous de les coder comme l’ordinateur ! »*  Continuer à disposer les résultats au tableau dans le tableau de résultats en langage binaire.  123 -> **1111011**  111 -> **1101111**  101 -> **1100101**  **Commentaires :** le choix des nombres 111 et 101 (qui n’utilisent que des 1 et des 0 en écriture décimale) ne pose pas de souci aux élèves car avec 123, ils commencent par décomposer sous la forme 64 + 32 + 16+8 +2 +1 avant de passer à l’écriture binaire. Ils font alors de même avec 111 et 101.  **Exercices d’entrainement pour la séance suivante** : voir annexe 6. |  |
| **Etape 3 :**  10’ | Bilan de la séance | Classe | « Le code utilisé pendant la séance s’appelle le code binaire ou langage binaire, c’est le code utilisé par les ordinateurs pour communiquer. |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Séance n°4** - Durée : 40’ | | Objectif(s) : **Langage binaire et fonctionnement de l’ordinateur : mise en pratique (message secret)** | | |
| Déroulement | Objectifs | Organisation | Consignes / Tâches | Matériel |
| **Étape 1 :**  10’ |  | Classe | **Rappel : Comment fonctionne un ordinateur ? En langage binaire.**  Vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=VRdp_vaNRoY&feature=youtu.be>  cette vidéo a l’avantage de reprendre brièvement ce qui a été fait et présente en plus le lien avec le fonctionnement de l’ordinateur.  <https://www.youtube.com/watch?v=2UqIJlVQE7o>  cette vidéo est plus simple que la précédente. |  |
| **Étape 2 :**  20’ | Phase d’entrainement | Binôme  puis mise en commun | **Recontextualisation + Réinvestissement calcul mental**  **Déchiffrer un message secret**  Chaque binôme reçoit la feuille de « Tom dans un grand magasin » : récit, tableau des sapins et table de correspondance lettre-nombre.  Lecture du texte. Observation du tableau avec les sapins  Laisser les élèves chercher un moment seuls puis donner des pistes pour « décoincer » ceux qui ne voient pas.   1. ***Observation du tableau codé****:*  * *14 lignes et 5 colonnes* * *1 ligne = 5 cases* * chaque ligne exprime un **nombre binaire** à exprimer en décimal  1. ***Observation du tableau de correspondance****:*   *lettre ↔ nombre en écriture décimal*  *nombre en écriture décimal ↔* nombre en écriture binaire   1. ***Organisation du tableau codé****:*  * sapin = 1 - case vide = 0 * ligne vide = espace entre les mots * message avec 3 mots * 1er mot = 3 lettres * 1ère lettre du 1er mot = 10011 = 16 + 2 + 1 = 19 -> S * 2ème mot = 6 lettres * 3ème mot = 3 lettres   Si besoin, pour certains binômes, possibilité de donner la feuille d’aide à la réalisation des différentes étapes.  **Mise en commun**  Réponse : SOS OUVREZ MOI | feuille message-secret-sapins  si besoin : feuille d’aide (3 tableaux)  voir annexe 5 |
| **Étape 3 :**  10’ | Réinvestissement | Binôme  puis mise en commun | **Encoder un message secret**  *« À votre tour, à l’aide du code nombre-lettre, vous pouvez écrire un message secret à vos camarades. »*  Si besoin, pour certains binômes, possibilité de donner la feuille d’aide afin d’aider à réaliser les différentes étapes.  Après vérification par l’enseignant, les binômes peuvent alors échanger leur message et chercher la solution. | si besoin : feuille d’aide (3 tableaux) |

|  |
| --- |
| **Prolongements possibles : non testés en classe** |
| **Prolongement 1**: *avec les 6èmes*  *Comment écrire 77 en binaire ?*   1. Les élèves doivent trouver :   77 = 64 + 8 + 4 + 1 -> 1 0 0 1 1 0 1   1. Faire ensemble au tableau une suite de divisions euclidiennes par 2.   Laisser les élèves observer le résultat.  Le résultat sera la juxtaposition des restes.  Le schéma ci-dessous explique la méthode.    **Prolongement 2**: tiré de la revue Plot numéro 48 de l’APMEP : un tour de magie utilisant la décomposition binaire. Tous les détails sont dans l’article <https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Systeme_binaire_Coillot.pdf> |