Préliminaire et notations

Voici un rappel de quelques notations classiques :
▷ $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
▷ $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
▷ $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
▷ $\mathbf{C}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{C}$.
▷ $\mathbf{C}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de $\mathbf{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, où $n \in \mathbf{N}$.
▷ Si $P \in \mathbf{C}[X]$ et $n \in \mathbf{N}$, on note $P^{(n)}$ la dérivée n-ième de P.
▷ $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille $n \geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbf{C}$. On note I_n son élément unité.

On considère une algèbre unitaire $\mathcal{A}$ de dimension finie sur le corps $\mathbf{C}$, dont on note $1_{\mathcal{A}}$ l'élément unité.

Une norme $\|\,.\,\|$ sur $\mathcal{A}$ est dite **norme d'algèbre** si :

(i) $\|1_{\mathcal{A}}\| = 1$

(ii) $(\forall\,(a,b) \in \mathcal{A}^2),\quad \|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$

En particulier, dans ce cas, on a :

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}), (\forall\, a \in \mathcal{A}),\quad \|a^n\| \leqslant \|a\|^n\,.$$

On **rappelle** que, dans une algèbre normée de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente.

Si $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} b_n$ sont des séries absolument convergentes à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{A}$, alors leur produit de Cauchy est la série $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} c_n$ avec

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}\,.$$

Cette série converge absolument et vérifie :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,.$$

On définit enfin la fonction exponentielle

$$\exp : a \mapsto 1_{\mathcal{A}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\,.$$

L'objet du problème est d'étudier dans certaines algèbres normées $(\mathcal{A}, \|\,.\,\|)$ particulières la surjectivité de l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ a \in \mathcal{A} & \longmapsto & a \exp a \end{array} \right.\,.$$

Partie I : Premiers résultats

A) Norme d'algèbre sur une C-algèbre de dimension finie

On considère une algèbre unitaire $\mathcal{A}$ de dimension finie sur le corps $\mathbf{C}$. On se donne une norme quelconque, notée $\|\,.\,\|$, sur $\mathcal{A}$. On se propose de vérifier l'existence d'une norme d'algèbre N sur $\mathcal{A}$.

1. On définit pour $a \in \mathcal{A}$ l'application

$$\sigma_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ x & \longmapsto & ax \end{array} \right. .$$

Démontrer que σ_a est un endomorphisme de $\mathcal{A}$.

2. Justifier le fait que σ_a est continue sur $(\mathcal{A}, \|\,.\,\|)$.

3. On se donne $a \in \mathcal{A}$. Démontrer que $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|\sigma_a(x)\|$ est un réel bien défini, qui sera noté $N(a)$.

4. **(a)** Démontrer que l'application

$$N : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ a & \longmapsto & N(a) \end{array}$$

définit une norme sur $\mathcal{A}$.

(b) Démontrer que N est bien une norme d'algèbre sur $\mathcal{A}$.

B) Deux identités préliminaires

On considère un entier naturel $n \geqslant 1$.

5. **(a)** Vérifier que $x \mapsto (1 - e^x)^n$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et, par exemple à l'aide d'arguments de développement limité, vérifier que sa dérivée $n-1$-ième en 0 est nulle.

(b) Démontrer la relation

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} p^{n-1} = 0 \,. \tag{1}$$

6. On se donne $u \in \mathbf{C}$ et on pose

$$P_0(X) = 1, \quad P_j(X) = X(X - ju)^{j-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n \,.$$

(a) Démontrer que $\mathcal{B} = (P_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

(b) Démontrer que :

$$(\forall\, P \in \mathbf{C}_n[X]),\ P(X) = P(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{X(X - ku)^{k-1}}{k!} P^{(k)}(ku)\,.$$

Indication : on pourra se servir de la base précédente.

(c) En déduire l'identité :

$$(X + n + 1)^n = (n + 1)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X(X + k)^{k-1}(n + 1 - k)^{n-k}\,. \tag{2}$$

Tournez la page S.V.P.

Partie II : La fonction $a \mapsto a \exp a$

On considère une algèbre de dimension finie $(\mathcal{A}, \|\,.\,\|)$, où $\|\,.\,\|$ est une norme d'algèbre. On **admettra** la propriété suivante :

Si $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$, est une suite double d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|\right)$ est fini, alors les trois expressions

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}u_{p,q}\right),\ \sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)\ \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n}u_{p,q}\right)$$

ont un sens et sont égales.

7. Justifier le fait que la fonction $\exp : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est bien définie et est continue sur $\mathcal{A}$.

8. On considère des éléments a et b de $\mathcal{A}$ qui commutent, c'est-à-dire tels que $ab = ba$.

(a) On introduit la suite double : $(\forall\,(p,q)\in\mathbf{N}^2)$, $\quad u_{p,q} = \dfrac{a^p b^q}{p!q!}$.
Démontrer que $\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|\right)$ est fini.

(b) En déduire à l'aide du résultat admis en début de cette section la relation

$$\exp(a+b) = \exp a \exp b\,.$$

On définit l'application $\Phi : \left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}\\ a & \longmapsto & a\exp a\end{array}\right.$.

9. **(a)** On note e le nombre réel $\exp(1)$. Étudier les variations sur $\mathbf{R}$ de $\eta : x \mapsto x\exp x$ et en déduire que dans $]0,+\infty[$, l'équation $\eta(x) = 1/e$ admet une unique solution. Celle-ci sera notée τ.

(b) Démontrer que la série entière complexe

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}}{n!}z^n$$

a pour rayon de convergence $1/e$.
On notera W sa somme sur son disque ouvert de convergence.

10. Démontrer que, pour tout $a \in \mathcal{A}$ tel que $\|a\| < 1/e$,

$$\omega(a) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}}{n!}a^n$$

est bien définie. Il en résulte que $\omega : a \mapsto \omega(a)$ réalise une application de $\Omega = \{a\in\mathcal{A}\,;\,\|a\|<1/e\}$ dans $\mathcal{A}$.

On se propose de montrer dans toute la suite de cette section, que l'on a autour de l'origine dans $\mathcal{A}$ la relation :

$$\omega(\Phi(a)) = \Phi(\omega(a)) = a\,.$$

11. On considère un élément $a \in \mathcal{A}$ tel que $\|a\| < \tau$. On introduit les suites doubles

$$(\forall\,p\in\mathbf{N}^*), (\forall\,q\in\mathbf{N}),\quad s_{p,q} = (-1)^{p-1}\frac{p^{p+q-1}a^{p+q}}{p!q!}\quad\text{ et }\quad v_{p,q} = \frac{p^{p+q-1}\|a\|^{p+q}}{p!q!}.$$

(a) Démontrer l'inégalité $\|a\| \exp \|a\| < 1/e$ et établir les relations

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} v_{p,q}\right) = -W(-\|a\| \exp \|a\|) \qquad \text{puis} \qquad \omega(\Phi(a)) = \sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} s_{p,q}\right).$$

(b) En déduire à l'aide des propriétés admises sur les suites doubles et de l'identité vue en **I-B-??** que pour tout élément a de $\mathcal{A}$ tel que $\|a\| < \tau$ on a $\omega(\Phi(a)) = a$.

On considère jusqu'à la fin de cette partie un élément $a \in \mathcal{A}$ tel que $\|a\| < 1/e$.

12. **(a)** Démontrer l'existence de $\rho > 1$ tel que la fonction

$$\varphi : t \mapsto \omega(ta) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}}{n!}t^n a^n$$

soit bien définie sur $]-\rho, \rho[$.

(b) Démontrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\rho, \rho[$ avec :

$$(\forall\, t \in]-\rho, \rho[), \quad \varphi'(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^n}{n!}t^n a^{n+1}$$

(c) Justifier le fait que $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)$ commutent pour tout $t \in]-\rho, \rho[$.

(d) Démontrer que $t \mapsto \exp(\varphi(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\rho, \rho[$ avec :

$$(\forall\, t \in]-\rho, \rho[), \quad \big(\exp(\varphi(t))\big)' = \varphi'(t)\exp(\varphi(t)) = \exp(\varphi(t))\varphi'(t).$$

13. On se propose d'établir la relation :

$$(\forall\, t \in [0, \rho[), \quad t\varphi'(t)(1 + \varphi(t)) = \varphi(t).$$

(a) Établir la relation :

$$(\forall\, t \in]0, \rho[), \quad \frac{\varphi(t)}{t} - \varphi'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)^{n-1}}{n!}t^n a^{n+1}.$$

(b) Montrer à l'aide d'un produit de Cauchy que :

$$(\forall\, t \in]0, \rho[), \quad \varphi(t)\varphi'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n a^{n+1}, \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k+1)^{n-k}.$$

(c) Établir à l'aide de l'identité vue en **I-B-??** l'égalité :

$$(\forall\, t \in]0, \rho[), \quad \frac{\varphi(t)}{t} - \varphi'(t) = \varphi(t)\varphi'(t),$$

puis la relation annoncée.

14. **(a)** Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\varphi(t)\exp(\varphi(t))}{t}$ est constante sur $]0, \rho[$, puis que :

$$(\forall\, t \in [0, \rho[), \quad \varphi(t)\exp(\varphi(t)) = ta.$$

(b) En déduire que l'on a $\Phi(\omega(a)) = a$.

Partie III : Le cas $\mathcal{A} = \mathbf{C}$

On se propose d'établir la surjectivité de l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & ze^z \end{array}$$

On **admettra** la propriété suivante :

> Soit $\sum_{n\in\mathbf{N}} \lambda_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence infini, de somme Λ.
> On suppose que Λ ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$. Alors il existe une série entière complexe $\sum_{n\in\mathbf{N}} \rho_n z^n$ de rayon de convergence infini, de somme Θ telle que :
>
> $$(\forall\, z \in \mathbf{C}), \quad e^{\Theta(z)} = \Lambda(z)\,.$$

On considère une série entière complexe $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence infini, de somme F.

On note G la partie réelle de F, ce qui revient à poser : $(\forall\, z \in \mathbf{C}), \quad G(z) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n z^n + \overline{a_n}\,\overline{z}^n)\,.$

15. **(a)** Démontrer la relation :

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}^*), (\forall\, R > 0), \quad a_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} G(Re^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t\,.$$

Indication : On pourra effectuer une intégration terme à terme après l'avoir justifiée.

(b) Calculer, pour tout $R > 0$, l'intégrale $I(R) = \int_0^{2\pi} G(Re^{it})\,\mathrm{d}t$ en fonction de a_0.

16. On suppose qu'il existe deux nombres réels $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 0$ tels que :

$$(\forall\, z \in \mathbf{C}), \quad G(z) \leqslant p|z| + q\,.$$

(a) Démontrer que

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}^*), (\forall\, R > 0), \quad |a_n| \leqslant \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} \big(pR + q - G(Re^{it})\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

(b) En déduire que F est un polynôme de degré $\leqslant 1$.

Dans la suite de cette partie, on va démontrer par l'absurde que Φ est surjective.
On suppose donc l'existence de $\beta \in \mathbf{C}$ tel que : $(\forall\, z \in \mathbf{C}), \quad \Phi(z) \neq \beta\,.$

17. Démontrer l'existence d'une série entière complexe $\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n z^n$, de rayon de convergence infini, telle que :

$$(\forall\, z \in \mathbf{C}), \quad e^{\Psi(z)} = \Phi(z) - \beta = ze^z - \beta\,.$$

On note G_Ψ la partie réelle de Ψ.

18. Démontrer l'existence de $p_0 \geqslant 0$ et $q_0 \geqslant 0$ tels que : $(\forall\, z \in \mathbf{C}), \quad G_\Psi(z) \leqslant p_0|z| + q_0\,.$

19. En déduire une contradiction et conclure.

20. Établir que $-1/e$ admet une infinité d'antécédents dans $\mathbf{C}$ par Φ.
Indication : on pourra exprimer z tel que $\Phi(z) = -1/e$ sous la forme $z = x + iy$.

Partie IV : Le cas $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

On se fixe un entier naturel $n \geqslant 1$. On suppose que l'algèbre $\mathcal{A}$ est $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, munie d'une norme d'algèbre.
On se propose d'établir la surjectivité de l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ A & \longmapsto & A\exp(A) \end{array}$$

On rappelle et on **admettra** le résultat suivant :

> Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ sont les $s \geqslant 1$ valeurs propres complexes distinctes de M, d'ordre de multiplicité $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$, alors M est semblable à la matrice diagonale par blocs de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$:
>
> $$\mathrm{diag}(M_1, \cdots, M_s) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_s \end{pmatrix},$$
>
> avec $M_k = \lambda_k I_{\alpha_k} + N_k \in M_{\alpha_k}(\mathbf{C})$ où $N_k \in M_{\alpha_k}(\mathbf{C})$ est nilpotente, pour tout $1 \leqslant k \leqslant s$.

21. On considère un polynôme $P \in \mathbf{C}_n[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
On introduit l'application

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}[X] \\ T & \longmapsto & \Delta(T) \end{array}$$

où $\Delta(T)$ est le reste de la division euclidienne de $T(P(X))$ par X^{n+1}.

- **(a)** Démontrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$.
- **(b)** Démontrer que Δ est un automorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$.
- **(c)** En déduire l'existence de $Q \in \mathbf{C}_n[X]$ tel que $Q(0) = 0, Q'(0) \neq 0$ et de $S \in \mathbf{C}[X]$ tel que

$$Q(P(X)) = X + X^{n+1}S(X).$$

- **(d)** Que peut-on dire de $P(Q(X))$?

22. Soit λ un nombre complexe différent de $-1/e$ et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice nilpotente (autrement dit, $U^n = 0$).
Soit $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $\mu e^{\mu} = \lambda$. Soit $P \in \mathbf{C}_n[X]$ le polynôme donné par : $P(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\mu}(\mu + k)}{k!} X^k$.
Vérifier que l'on peut associer à P un polynôme Q comme à la question **21** et que

$$\Phi(\mu I_n + Q(U)) = \lambda I_n + U.$$

23. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$\Phi(A) = -(1/e)I_n + U.$$

24. Montrer que $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est surjective.

FIN DU SUJET