Correction de la partie probabilité
(devoir été 1 - pb A)

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$

a) Puisque X_1 est à valeurs dans $\{0,1\}$, par la formule des probabilités totales on a $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \underbrace{\mathbb{P}(X_2 = 1 / X_1 = 0)}_{=\beta}\underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 0)}_{=1-p_1} + \mathbb{P}(X_2 = 1 / X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1)$

et $\mathbb{P}(X_2 = 1 / X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 0 / X_1 = 1) = 1 - \alpha$

donc $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \beta(1-p_1) + (1-\alpha)p_1 = p_1(1-\alpha-\beta) + \beta$

b) Plus généralement si $n \geq 1$, puisque X_n est à valeurs dans $\{0,1\}$

également $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 / X_n = 0)\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 / X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1)$

Ainsi $p_{n+1} = p_n(1-\alpha-\beta) + \beta$

c) D'après 1.b) $(p_n)_n$ est une suite arithmetico-géométrique

Une solution constante est donnée par $p^* = p^*(1-\alpha-\beta) + \beta$

ie $p^* = \beta/\alpha+\beta$. Si $(p_n)_n$ est solution de l'équation, en posant $\forall n \geq 1$ $u_n = p_n - p^*$, la suite $(u_n)_n$ vérifie $u_{n+1} = u_n(1-\alpha-\beta)$, $\forall n \geq 1$

et ainsi $u_n = (1-\alpha-\beta)^{n-1}u_1$

On en déduit donc $\forall n \geq 1$ $p_n = (1-\alpha-\beta)^{n-1}(p_1 - p^*) + p^*$

d) Par hypothèse $0 < \alpha < 1$ et $0 < \underbrace{\beta \leq 1}_{\text{car } \beta \text{ est une probabilité conditionnelle}}$

On a donc $0 < \alpha + \beta < 2$ et $|1-\alpha-\beta| < 1$ donc $(1-\alpha-\beta)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

et $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} p^*$

2) On suppose ici que $p_1 = p^*$

a) Puisque $p_1 = p^*$ on a $p_2 = p^*$ et X_2 suit la même loi de Bernoulli de paramètre p^* que X_1.

b) Le couple (X_1, X_2) est à valeurs dans $\{0,1\}^2$

Sa loi est déterminée par $\mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_2)$ pour $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{0,1\}^2$

$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 / X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) = \beta(1-p^*)$

Puisque $\mathbb{P}(X_1 = 0) = (1-p^*)$ on en déduit que

$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = (1-p^*)(1-\beta)$

De même $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 0 / X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) = \alpha p^*$

et $\mathbb{P}(X_1=1, X_2=1) = p^\alpha(1-\alpha)$

c) $X_1 \sim \mathcal{B}(p^\alpha)$ et X_2 a même loi que X_1 donc

$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = p_\alpha$ et $Var(X_1) = Var(X_2) = p^\alpha(1-p^\alpha)$

d) $Cov(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$

$$\mathbb{E}(X_1X_2) = \sum_{\substack{\varepsilon\in\{0,1\}^2 \\ \varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2)}} \varepsilon_1\varepsilon_2\, \mathbb{P}(X_1=\varepsilon_1, X_2=\varepsilon_2)$$

$$= 1 \times \mathbb{P}(X_1=1, X_2=1) = p^\alpha(1-\alpha)$$

Ainsi $Cov(X_1, X_2) = p^\alpha\left[(1-\alpha) - p^\alpha\right]$

e) Si $p^\alpha \neq 1-\alpha$ $Cov(X_1, X_2) \neq 0$ (car $p^\alpha > 0$) et donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Sinon $p^\alpha = 1-\alpha \iff \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1-\alpha \iff \alpha - \alpha(\alpha+\beta) = 0 \iff \alpha+\beta = 1$

dans ce cas $\mathbb{P}(X_1=1, X_2=1) = (p^\alpha)^2 = \mathbb{P}(X_1=1)\times\mathbb{P}(X_2=1)$

$\mathbb{P}(X_1=1, X_2=0) = p^\alpha(1-p^\alpha) = \mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_2=0)$

$\mathbb{P}(X_1=0, X_2=1) = (1-p^\alpha)\beta = (1-p^\alpha)(1-\alpha) = (1-p^\alpha)p^\alpha$
$= \mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(X_2=1)$

et $\mathbb{P}(X_1=0, X_2=0) = (1-p^\alpha)(1-\beta) = (1-p^\alpha)\alpha = (1-p^\alpha)(1-p^\alpha)$
$= \mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(X_2=0)$

On en déduit que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes.

3) N désigne le numéro du jour où l'appareil tombe en panne pour la première fois et on suppose que $X_1 = 1$.

Ainsi N est à valeurs dans $\{n\in\mathbb{N} ; n \geq 2\}$

Si $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, $\{N>n\} = \{X_1=1, \dots, X_n=1\} = \bigcap_{k=1}^{n}\{X_k=1\}$

Par hypothèse $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1}\{X_k=1\} \,/\, \bigcap_{k=1}^{n}\{X_k=1\}\right) = \mathbb{P}(X_{n+1}=1 / X_n=1) = 1-\alpha$

On en déduit que $\mathbb{P}(N>n+1) = \mathbb{P}(N>n+1/N>n)\mathbb{P}(N>n) = (1-\alpha)\mathbb{P}(N>n)$

$(\mathbb{P}(N>n))_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $1-\alpha$

et de premier terme $\mathbb{P}(N>1) = 1$ donc

$\forall n\geq 1$ $\mathbb{P}(N>n) = (1-\alpha)^{n-1}$ donc

$\forall n\geq 0$ $\mathbb{P}(N-1>n) = (1-\alpha)^n$

Cette relation caractérise une loi géométrique de paramètre $1-(1-\alpha) = \alpha$

puisque $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\mathbb{P}(N-1=n) = \mathbb{P}(N-1>n-1) - \mathbb{P}(N>n)$
$= (1-\alpha)^{n-1} - (1-\alpha)^n$
$= \alpha(1-\alpha)^{n-1}$

Ccl $N-1$ suit bien une loi géométrique de paramètre α.

4) a) $Y_1, Y_2 \sim \mathcal{G}(p)$ avec Y_1 et Y_2 indépendants

La fonction génératrice de la variable Y_1 à valeurs dans $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ est définie par pour tout $|t| \leq 1$

$G_{Y_1}(t) = \mathbb{E}(t^{Y_1}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} t^n \, \mathbb{P}(Y_1 = n)$ (théorème de transfert)

$= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} pt \left[t(1-p)\right]^{n-1} = \dfrac{pt}{1-t(1-p)}$ car $|t(1-p)| \leq |1-p| < 1$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (t(1-p))^{n-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (t(1-p))^k = \dfrac{1}{1-t(1-p)}$

b) Soit $|t| \leq 1$

$G_{Y_1+Y_2}(t) = \mathbb{E}(t^{Y_1+Y_2}) = \mathbb{E}(t^{Y_1} \times t^{Y_2})$

$= \mathbb{E}(t^{Y_1}) \times \mathbb{E}(t^{Y_2})$ car Y_1 est indépendante de Y_2

$= \left(\dfrac{pt}{1-t(1-p)}\right)^2$ car Y_2 a même loi géométrique de paramètre p que Y_1.

c) $Z = \min(Y_1, Y_2)$. Soit $t \in \mathbb{R}$, $\underbrace{F_Z(t)}_{\text{fonction de répartition}} = \mathbb{P}(Z \leq t)$ et

on remarque que $\{Z > t\} = \{Y_1 > t\} \cap \{Y_2 > t\}$

donc $\mathbb{P}(Z > t) = \mathbb{P}(Y_1 > t) \times \mathbb{P}(Y_2 > t)$ car Y_1 est indépendante de Y_2

alors $F_Z(t) = 1 - \mathbb{P}(Z > t) = 1 - (\mathbb{P}(Y_1 > t))^2$ car $Y_1 \overset{\mathcal{L}}{=} Y_2$ (même loi)

et on a $\mathbb{P}(Y_1 > t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(Y_1 > t, Y_1 = n)$ donc

$\mathbb{P}(Y_1 > t) = \sum_{\substack{n > t \\ n \in \mathbb{N}^*}} p(1-p)^{n-1} = (1-p)^{[t]}$ si $t \geq 0$

$= 1$ si $t < 0$

On en déduit que $F_Z(t) = \begin{cases} 1-(1-p)^{2[t]} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

et ainsi $Z \sim \mathcal{G}(1-(1-p)^2)$

d) $T = \max(Y_1, Y_2)$

Soit $t \geq 0$, $\underbrace{F_T(t)}_{= \mathbb{P}(T \leq t)} = \mathbb{P}(\max(Y_1, Y_2) \leq t)$

$= \mathbb{P}(Y_1 \leq t, Y_2 \leq t)$

$= \mathbb{P}(Y_1 \leq t) \times \mathbb{P}(Y_2 \leq t)$ car Y_1 indépendante de Y_2

$= (1-(1-p)^{[t]})^2$ car Y_1 a même loi que Y_2

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$

$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \leq n) - \mathbb{P}(T < n)$

$= (1-(1-p)^n)^2 - (1-(1-p)^{n-1})^2$

$= 2(1-p)^{n-1}(1-(1-p)) + (1-p)^{2(n-1)}((1-p)^2-1)$

$= 2(1-p)^{n-1} \times p + (1-p)^{2(n-1)}((1-p)^2-1)$

5) On note N_i le numéro du jour où l'appareil i tombe en panne pour $i \in \{1,2\}$.

La première panne aura lieu au bout de $\min(N_1-1, N_2-1)$ jour. Par hypothèse N_1 est indépendante de N_2 donc $Y_1 = N_1-1$ est indépendante de $Y_2 = N_2-1$ et ainsi $\min(N_1-1, N_2-1)$ $= \min(Y_1, Y_2)$ avec $Y_i \sim \mathcal{G}(\alpha)$ par la partie 3).

On a donc $\min(N_1-1, N_2-1) \sim \mathcal{G}(1-(1-\alpha)^2)$

et en moyenne la première panne a lieu au bout de $\mathbb{E}(\min(N_1-1, N_2-1)) = \frac{1}{1-(1-\alpha)^2}$

En effet, si Y est une variable de loi géométrique de paramètre p on a $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \underbrace{p(1-p)^{k-1}}_{=\mathbb{P}(Y=k)} = -p \frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}(1-x)^k}_{=\frac{1}{1-(1-x)}}\Big)\Big|_{x=p}$

$= -p \times \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=p} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$