SESSION DE 1989

CONCOURS EXTERNE

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

L'usage des instruments de calcul, en particulier des calculatrices électroniques de poche — y compris calculatrices programmables et alphanumériques — à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et objectif du problème

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par I l'intervalle $[-1, +1]$ de $\mathbb{R}$. Pour p entier positif ou nul, on note $C^p(I)$ (resp. $C^\infty(I)$) l'espace des fonctions f réelles de classe C^p (resp. C^∞) sur I. On désigne par $\mathscr{E}(I)$, l'espace des fonctions continues par morceaux sur I. On rappelle la définition de telles fonctions : une fonction f, définie sur I, est dite continue par morceaux sur I s'il existe une subdivision $-1 = a_0 < a_1 < \dots < a_s = 1$ de I telle que la restriction $f \mid]a_i, a_{i+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, s-1$. La k-ième dérivée de f est notée indifféremment $f^{(k)}$ ou $\dfrac{d^k f}{dx^k}$ avec, pour $k = 0$, la convention usuelle $\dfrac{d^0 f}{dx^0} = f$.

On notera $\mathscr{L}$ l'opérateur de Legendre, c'est-à-dire l'opérateur qui à une fonction f de classe C^2 associe la fonction $\mathscr{L} f = \dfrac{d}{dx}\left[(x^2 - 1)\dfrac{df}{dx}\right]$.

Le problème est centré sur le développement d'une fonction en série de Fourier-Legendre et sur des applications d'un tel développement. Dans la partie II on obtient une expression de la distance $d_n(f)$ d'une fonction f continue par morceaux sur I à l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Ceci amène la considération de la série de Fourier-Legendre de f dont la convergence simple vers f sur $]-1, +1[$ est établie dans la partie IV lorsque f est κ-lipschitzienne et dont les convergences quadratique et uniforme vers f sur I sont prouvées dans la partie V lorsque f est de classe C^∞. La partie V établit également une caractérisation, parmi les fonctions κ-lipschitziennes, des fonctions de $C^\infty(I)$ à l'aide d'une propriété de « croissance » de la suite $(d_n(f))$. La partie I étudie quelques propriétés de l'opérateur et des polynômes de Legendre qui sont utiles pour la suite du problème. Enfin, la partie III est consacrée à des inégalités portant sur les normes d'un polynôme et de sa dérivée; ces inégalités étant utiles notamment dans la partie V.

Tournez la page S.V.P.

I. OPÉRATEUR ET POLYNÔMES DE LEGENDRE

Dans cette partie, on étudie l'action de $\mathscr{L}$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{P}$ des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels. Plus précisément, on propose de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres P_n de l'endomorphisme ainsi défini puis d'étudier quelques propriétés élémentaires des polynômes de Legendre P_n.

A. Valeurs propres de l'opérateur $\mathscr{L}$.

Pour n appartenant à $\mathbb{N}$, on considère l'espace vectoriel $\mathscr{P}_n$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à une indéterminée et à coefficients réels.

I.1. Montrer que $\mathscr{L}$ induit un endomorphisme $\mathscr{L}_n$ *de* $\mathscr{P}_n$ et calculer la matrice L_n de $\mathscr{L}_n$ relativement à la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathscr{P}_n$.

I.2. Déterminer les valeurs propres de $\mathscr{L}_n$ et en déduire que $\mathscr{L}_n$ est diagonalisable.

B. Vecteurs propres de l'opérateur $\mathscr{L}$.

On considère les fonctions polynomiales U_n et P_n définies par : $U_n(x) = (x^2 - 1)^n$ et $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n \cdot n!}\dfrac{d^n U_n}{dx^n}(x)$, en convenant que $U_0(x) = P_0(x) = 1$.

I.3. Montrer que les fonctions polynomiales P_{2n} et P_{2n+1} sont respectivement paire et impaire.

I.4. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $\dfrac{d^n}{dx^n}[(x-1)^n(x+1)^n]$, montrer que $P_n(1) = 1$.

I.5. Calculer P_1 et P_2.

I.6.*a.* Vérifier les relations :

(1) $\quad U'_{n+1}(x) - 2(n+1)x\,U_n(x) = 0$

(2) $\quad (x^2 - 1)U'_n(x) - 2nx\,U_n(x) = 0$.

b. En dérivant $(n+1)$ fois (1) et (2), montrer que la suite (P_n) vérifie :

(3) $\quad P'_{n+1}(x) = x\,P'_n(x) + (n+1)\,P_n(x)$

(4) $\quad \mathscr{L}P_n = n(n+1)P_n$.

c. Déduire de ce qui précède, les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathscr{L}$ considéré comme endomorphisme de $\mathscr{P}$.

I.7. Pour n entier supérieur ou égal à 1, soit u la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$u(x) = [P_n(x)]^2 + \frac{(1-x^2)}{n(n+1)}[P'_n(x)]^2.$$

En utilisant la relation (4), montrer que u est monotone. En déduire que, pour tout élément x de I, $|P_n(x)| \leqslant 1$.

I.8. Montrer que, pour n entier supérieur ou égal à 1, P_n est exactement de degré n et calculer le coefficient a_n de x^n dans P_n.

En déduire que $\mathscr{P}_n = \bigoplus\limits_{k=0}^{n} \mathbb{R}\cdot P_k$ où $\mathbb{R}\cdot P_k$ désigne la droite vectorielle engendrée par P_k.

II. DISTANCE D'UNE FONCTION DE $\mathscr{E}$(I) À L'ESPACE $\mathscr{P}_n$

Pour f et g appartenant à $\mathscr{E}$(I), on pose :

$$(f|g) = \int_{-1}^{+1} f(x)\,g(x)\,dx\,, \quad \|f\| = \left(\int_{-1}^{+1} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

(symboles qui définissent sur le sous-espace C^0 (I) un produit scalaire et la norme associée.)

II.1. **Orthogonalité des polynômes P_n.**

Montrer que pour m et n appartenant à $\mathbb{N}$, $(\mathscr{L}P_n|P_m) = (P_n|\mathscr{L}P_m)$. En déduire que $(P_n|P_m) = 0$ si m et n sont deux entiers distincts.

II.2. **Calcul de $\|P_n\|$ et construction d'une suite orthonormale.**

a. En utilisant l'orthogonalité démontrée précédemment, montrer que :

(5) $$\int_{-1}^{+1} P'_{n+1}(x)\,P_n(x)\,dx = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2. \text{ (On convient que } a_0 = 1.)$$

b. Montrer la relation :

(6) $$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = 2 - 2\int_{-1}^{+1} x\,P_n(x)\,P'_n(x)dx.$$

c. En utilisant les relations (3), (5) et (6), montrer que $\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.

d. En déduire que la suite de fonctions polynomiales réelles $(\tilde{P}_n)$, définies par : $\tilde{P}_n(x) = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\;P_n(x)$, est orthonormale pour le produit scalaire $(\,|\,)$.

II.3. **Évaluation de la norme de $\mathscr{L}_n$.**

Montrer que : $\|\mathscr{L}_n\| = \sup\{\|\mathscr{L}_n P\|,\ P \in \mathscr{P}_n,\ \|P\| = 1\} = n(n+1)$.

(On pourra exprimer le polynôme P sur la base orthonormale $(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n)$ de $\mathscr{P}_n$.)

II.4. **Expression de $d_n(f)$.**

Pour f appartenant à $\mathscr{E}$(I) et n appartenant à $\mathbb{N}$, on note $c_n(f) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\,\tilde{P}_n(x)\,dx$. La distance de f à $\mathscr{P}_n$ qui est définie par $d(f, \mathscr{P}_n) = \operatorname{Inf}\{\|f - P\|,\ P \in \mathscr{P}_n\}$ est notée plus simplement $d_n(f)$.

a. Soient $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \tilde{P}_k$ un élément de $\mathscr{P}_n$ et f un élément de $\mathscr{E}$(I), montrer que :

$$\|f - P\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2 + \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - c_k(f))^2.$$

b. En déduire qu'il existe un élément unique Q de $\mathscr{P}_n$ tel que $\|f - Q\| = d_n(f)$.
Expliciter ce polynôme Q et montrer que $(d_n(f))^2 = \|f\|^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2$.

c. En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.

Tournez la page S.V.P.

III. INÉGALITÉS DE MARKOV

III.1. Soient θ et φ les fonctions définies sur l'intervalle $]-1, +1[$ par :

$$\theta(x) = \frac{1}{4}\left\{\frac{2x}{1-x^2} + \ln\frac{1+x}{1-x}\right\}, \qquad \varphi(x) = (1-x^2)\,\theta(x).$$

a. Calculer $\theta'(x)$.

b. Soit F une fonction réelle de classe C^1 sur I vérifiant $F(-1) = F(1) = 0$. Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \theta'(x)\,|F(x)|^2\,dx$ a un sens et que :

$$\int_{-1}^{+1} \theta'(x)\,|F(x)|^2\,dx = -2\int_{-1}^{+1} \theta(x)\,F(x)\,F'(x)\,dx.$$

c. En faisant apparaître la fonction $\dfrac{\theta}{\sqrt{\theta'}}$, montrer que :

$$\left(\int_{-1}^{+1} |\theta(x)\,F(x)\,F'(x)|\,dx\right)^2 \leqslant \int_{-1}^{+1} |\varphi(x)\,F'(x)|^2\,dx \,.\, \int_{-1}^{+1} \theta'(x)\,|F(x)|^2\,dx.$$

d. En déduire que :

(7) $$\int_{-1}^{+1} \left(\frac{F(x)}{1-x^2}\right)^2 dx \leqslant 4\int_{-1}^{+1} |\varphi(x)\,F'(x)|^2\,dx.$$

III.2. Soit f une fonction réelle de classe C^2 sur I.

a. Montrer que, pour x appartenant à $]-1, +1[$, la dérivée de f au point x vérifie :

(8) $$f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\int_{-1}^{x} \mathscr{L}f(t)\,dt.$$

b. En déduire qu'il existe une constante C positive, indépendante de f, telle que :

(9) $$\|f'\| \leqslant C\,\|\mathscr{L}f\|.$$

III.3. Soit g une fonction réelle de classe C^1 sur I.

a. Montrer que, pour tout couple (x, y) d'éléments de I :

(10) $$[g(x)]^2 \leqslant [g(y)]^2 + 2\,\|g\|\,\|g'\|.$$

b. En intégrant cette inégalité sur l'intervalle I, montrer que :

(11) $$\operatorname*{Sup}_{x\in I} |g(x)| \leqslant \|g\| + \|g'\|.$$

III.4. Déduire de III.2., III.3. et II.3. qu'il existe des constantes C_1 et C_2 positives telles que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ et tout polynôme P appartenant à $\mathscr{P}_n$, on ait :

(12) $$\|P'\| \leqslant C_1\,n^2\,\|P\|.$$

(13) $$\operatorname*{Sup}_{x\in I} |P'(x)| \leqslant C_2\,n^4 \operatorname*{Sup}_{x\in I} |P(x)|.$$

IV. DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION LIPSCHITZIENNE EN SÉRIE DE POLYNÔMES DE LEGENDRE

IV.1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

a. Montrer que le polynôme $Q_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x)$ appartient à $\mathscr{P}_n$.

b. Déduire de II.1. que le polynôme xP_n est orthogonal au polynôme P_k si $k \leqslant n-2$. En déduire qu'il existe deux réels λ et μ tels que : $Q_n(x) = \lambda P_n(x) + \mu P_{n-1}(x)$.

c. Déduire de I.3. et I.4. que $\lambda = 0$, $\mu = -n$ et que l'on a la relation :

(14) $$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

d. En utilisant (14), montrer que :

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}.$$

IV.2. Pour n appartenant à $\mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$.

a. Montrer que pour $n \geqslant 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ et que $I_{2n} \leqslant I_{2n-1}$.

b. Calculer I_{2n} et I_{2n-1}. En déduire, pour $n \geqslant 1$, l'inégalité : $|P_{2n}(0)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

IV.3. En exprimant $P'_{2n+1}(0)$ à l'aide de $P_{2n+2}(0)$ grâce aux relations (3) et (14), montrer que, pour n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$|P'_{2n+1}(0)| \leqslant 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}.$$

IV.4. Pour n entier supérieur ou égal à 1, on considère les fonctions v (resp. Φ) définies sur I (resp. $]-1,+1[$) par :

$$v(x) = \sqrt{1-x^2}\,P_n(x) \left(\text{resp. } \Phi(x) = \frac{1}{1-x^2}\left[n(n+1) + \frac{1}{1-x^2}\right]\right).$$

a. Montrer que v est solution sur $]-1,+1[$ de l'équation différentielle $\frac{d^2v}{dx^2} + \Phi v = 0$.

b. Étudier les variations de la fonction w définie sur $]-1,+1[$ par :

$$w(x) = [v(x)]^2 + \frac{[v'(x)]^2}{\Phi(x)}.$$

En déduire que pour x appartenant à $]-1,+1[$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

(15) $$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}}.$$

IV.5. En utilisant la relation (14), montrer que pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de $\mathbb{R}$:

(16) $$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1)\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x-y}.$$

On notera : $K_n(x,y) = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x-y}$.

Tournez la page S.V.P.

IV.6. Soit f un élément de $\mathscr{E}(\mathrm{I})$. Pour n appartenant à $\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{S}_n f = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\tilde{\mathrm{P}}_k$.

a. Montrer que pour tout élément x de I, $\mathrm{S}_n f(x) = \int_{-1}^{+1} \mathrm{K}_n(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y$.

b. En déduire que $\int_{-1}^{+1} \mathrm{K}_n(x, y)\,\mathrm{d}y = 1$ et que, pour tout élément x de I,

$$\mathrm{S}_n f(x) - f(x) = \int_{-1}^{+1} \mathrm{K}_n(x, y)(f(y) - f(x))\,\mathrm{d}y.$$

c. On suppose de plus que f est κ-lipschitzienne sur I, c'est-à-dire que pour tout couple (x, y) d'éléments de I, $|f(x) - f(y)| \leqslant \kappa|x - y|$.

Montrer que, pour tout élément x de $]-1, +1[$: $\lim_{n \to \infty} \mathrm{S}_n f(x) = f(x)$.

(On pourra décomposer l'intégrale $\int_{-1}^{+1}$ en $\int_{-1}^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{+1}$ et utiliser IV.4.*b.* et II.4.*c.* pour une fonction de $\mathscr{E}(\mathrm{I})$ convenable.)

V. CARACTÉRISATION DES FONCTIONS DE $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{I})$ PAR LA SUITE $(d_n(f))$.

On dira qu'une suite (α_n) de nombres réels est du type (S) si, pour tout entier k appartenant à $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n^k \alpha_n$ est absolument convergente.

V.1. Soit (c_n) une suite de nombres réels du type (S). Montrer que, pour tout x élément de I, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \tilde{\mathrm{P}}_n(x)$ est convergente.

Montrer que sa somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \tilde{\mathrm{P}}_n$ est de classe C^∞ sur I.

V.2. Soit f une fonction de classe C^∞ sur I.

a. Montrer que la suite $(c_n(f))$ est du type (S) et que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)\,\tilde{\mathrm{P}}_n$ est uniformément convergente sur I et a pour somme la fonction f. (On pourra évaluer $c_n(\mathscr{L} f)$ en fonction de $c_n(f)$.)

b. En déduire que l'opérateur $\mathscr{A} : f \to \mathscr{A} f = \mathscr{L} f + f$ est un isomorphisme de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{I})$ sur $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{I})$.

c. Prouver la convergence en moyenne quadratique de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)\,\tilde{\mathrm{P}}_n$ vers f sur I, c'est-à-dire :

$$\lim_{\mathrm{N} \to \infty} \left\| f - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} c_n(f)\,\tilde{\mathrm{P}}_n \right\| = 0.$$

Prouver également que $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (c_n(f))^2$.

V.3. Déduire de V.2. et IV.6.*c.* que, pour une fonction f κ-lipschitzienne sur I, f est de classe C^∞ sur I si et seulement si la suite $(d_n(f))$ est du type (S).