Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A : logarithme de base a

Rappel. On appelle *logarithme* toute fonction f définie sur $]0,+\infty[$, dérivable, telle que :

- il existe un nombre réel a non nul tel que, pour tout nombre réel x strictement positif,
$$f'(x) = \frac{a}{x}.$$
- $f(1) = 0$.

I. Soit a un nombre réel non nul. Justifier qu'il existe un unique logarithme, que l'on notera f_a, tel que, pour tout nombre réel $x > 0$, $f'_a(x) = \frac{a}{x}$. Lorsque $a = 1$, on utilise la notation ln (logarithme néperien).

II. Pour tout nombre réel a non nul, exprimer f_a à l'aide de ln.

III. Montrer que, pour tout nombre réel a non nul, tous nombres réels $x, y > 0$,
$$f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y).$$
Indication : on pourra étudier la fonction définie par $x \mapsto f_a(xy)$.

IV. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$,
$$f_a\left(\frac{1}{x}\right) = -f_a(x).$$

V. Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel. Montrer que $f_a(x^r) = rf_a(x)$.
Indication : on pourra commencer par le cas où r est un entier naturel, puis celui où r est un entier relatif, avant de conclure dans le cas où r est un nombre rationnel.

VI. Montrer que la fonction ln est strictement croissante.

VII. Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0 de la fonction ln.

VIII. Montrer que la fonction ln est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

IX. Comment peut-on généraliser les résultats des questions VI. et VIII. au cas des logarithmes f_a ?

Partie B : logarithme décimal

X. Montrer qu'il existe un unique logarithme f_a tel que $f_a(10) = 1$. Ce logarithme est noté Log et est appelé logarithme décimal.

XI. Soit N un nombre entier naturel dont l'écriture en base dix possède n chiffres. Déterminer la partie entière de $\mathrm{Log}(N)$.

XII. Les exercices suivants sont proposés à une classe de terminale scientifique :

> **1.** Combien le nombre 4^{2019} possède t-il de chiffres ?
>
> **2.** Le niveau sonore L (en dB) s'exprime en fonction de l'intensité I (en $\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$) selon la formule
> $$L = 10\,\mathrm{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$
> où $I_0 = 10^{-12}\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$ correspond à l'intensité sonore minimale à laquelle l'oreille est sensible pour un son de fréquence 1000Hz.
>
> **a.** Calculer le niveau sonore correspondant à une intensité sonore de $10^{-5}\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.
>
> **b.** Quel est l'effet sur l'intensité sonore d'une augmentation du niveau sonore de 10dB ?
>
> **3.** Une balle lancée d'une hauteur de 2m atteint après chaque rebond 70% de sa hauteur précédente et cesse de rebondir quand sa hauteur n'excède pas 1mm. Au bout de combien de rebonds cela se produira-t-il ?

Pour chacun de ces trois exercices, présentez une rédaction de la solution, telle que vous l'exposeriez à une classe de terminale scientifique.

Partie C : calcul approché de valeurs du logarithme népérien

XIII. Montrer que pour tout nombre réel $x \neq -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

XIV. En déduire que pour tout nombre réel $x > -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t.$$

XV. On suppose que $x \geqslant 0$. Montrer que

$$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

XVI. On suppose que $-1 < x \leqslant 0$. Montrer que

$$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

XVII. En déduire que, si $-1 < x \leqslant 1$, la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est convergente et que sa somme vaut $\ln(1+x)$. On pourra raisonner par disjonction de cas.

XVIII. Justifier que la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ diverge lorsque $|x| > 1$.

XIX. À l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur de n pour laquelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-8} près pour :

1. $x = \dfrac{1}{3}$.

2. $x = \dfrac{1}{8}$.

3. $x = 1$.

XX. **1.** Justifier que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

2. Soit p un entier naturel non nul. On considère $R_p = \displaystyle\sum_{k=2p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que

$$R_p = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

3. Soit N un entier naturel non nul. Montrer que si $0 < p \leqslant N$,

$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

4. Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer que si $0 < p \leqslant N$,

$$\int_{p}^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2}.$$

5. En déduire que pour tout entier naturel non nul p,

$$\frac{1}{4p+4} \leqslant R_p \leqslant \frac{1}{4p-2}.$$

6. Montrer que R_p est équivalent à $\dfrac{1}{4p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

XXI. On se propose de calculer des approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

1. Exprimer $\ln(2)$ et $\ln(3)$ à l'aide de $\ln\left(1+\dfrac{1}{3}\right)$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{8}\right)$.

2. Les calculs de la question XIX. ont donné les valeurs approchées à 10^{-8} près suivantes :

$$\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) \approx 0,28768207 \qquad \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) \approx 0,11778304.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(2)$ et $\ln(3)$. Donner la précision de ces résultats.

XXII. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n}\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

XXIII. En déduire que si $x \in [0,1[$, alors

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \frac{1}{1-x^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

XXIV.

1. Quelle valeur de x doit-on choisir pour déduire de la question précédente une valeur approchée de $\ln(2)$? de $\ln(3)$?
2. À l'aide de ces valeurs de x, donner une valeur de n permettant d'obtenir des valeurs approchées de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ à 10^{-8} près.
3. Comparer cette méthode d'approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ avec celle de la question XXI.

XXV. On se propose de calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout nombre entier $n > 1$.

1. Expliquer pourquoi il suffit de calculer des valeurs de $\ln(p)$ pour p nombre premier.
2. Décrire une méthode pour calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout entier n tel que $2 \leqslant n \leqslant 20$.

Problème n° 2

Notations.
On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si A et B sont deux événements de Ω avec B de probabilité non nulle, la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est notée $\mathbb{P}_B(A)$.
Soient k et n des entiers naturels, avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Le coefficient binomial donnant le nombre de parties à k éléments est noté $\binom{n}{k}$.

On utilisera la convention $0^0 = 1$ dans tout le problème.

Partie A : quelques études de séries

I. **1.** Montrer que, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x différent de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

2. En déduire, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel x différent de 1, une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

3. Soit $x \in]-1\,;1[$. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ et donner la valeur de sa somme.

II. Soit k un entier naturel. On considère la série entière

$$S_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

1. Calculer le rayon de convergence de $S_k(x)$.

2. Montrer que S_k est dérivable sur $]-1\,;1[$ et que, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$S_k'(x) = (k+1)S_{k+1}(x).$$

3. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$S_k(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

4. Soit $x \in]-1\,;1[$. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1}$ et montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3}.$$

Indication : on pourra écrire n^2 en fonction de $\binom{n}{1}$ et de $\binom{n}{2}$.

III. Application : soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit p un réel de $]0\,;1[$. Soit X une variable aléatoire discrète suivant la loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire une variable aléatoire définie sur Ω, telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

1. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

2. Montrer que X^2 admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que X admet une variance et la calculer.

Partie B : étude d'une séance de tir à l'arc

On considère deux archers A_1 et A_2 qui tirent chacun sur une cible de manière indépendante. L'archer A_1 (respectivement A_2) touche sa cible avec une probabilité p_1 (respectivement p_2) strictement comprise entre 0 et 1. On suppose de plus que les tirs des joueurs sont indépendants les uns des autres. On appelle X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire donnant le nombre de tirs nécessaires à l'archer A_1 (respectivement A_2) pour qu'il touche sa cible pour la première fois. On note $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.

IV. Déterminer les valeurs possibles prises par X_1.

V. On introduit, pour tout entier naturel non nul i, l'événement E_i : « le joueur A_1 touche la cible à son i-ème tir ».
Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X_1 = k)$ à l'aide des événements E_i, $i \in \mathbb{N}^*$.

VI. En déduire la loi de X_1.

VII. **1.** Pour tout entier naturel non nul k, calculer $\mathbb{P}(X_1 > k)$.

2. Montrer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_{(X_1 > m)}(X_1 > n + m) = \mathbb{P}(X_1 > n).$$

VIII. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$.

IX. Calculer $\mathbb{P}(X_1 > X_2)$.

X. Que vaut $\mathbb{P}(X_2 > X_1)$?

XI. On réalise à présent une deuxième expérience avec les deux archers A_1 et A_2 de la manière suivante : l'archer A_1 tire jusqu'à ce qu'il touche sa cible. On appelle X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de tirs effectués par le joueur A_1 pour qu'il touche sa cible pour la première fois. Ensuite, si X_1 prend la valeur n, l'archer A_2 effectue n tirs en direction de sa cible dans les mêmes conditions que la première expérience.
On définit alors la variable aléatoire G égale au nombre de fois où la cible a été touchée par l'archer A_2. On suppose dans cette partie que $p_1 = p_2$ et on note

$$p = p_1 = p_2, \qquad q = 1 - p = 1 - p_1 = 1 - p_2.$$

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_1 = n)}(G = k)$. On distinguera les cas $k > n$ et $k \leq n$.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(G = k) = q^{k-1}p^{k+1} \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} q^{2n-2k}$.

3. En utilisant la partie **A.**, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(G = k) = \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} \times \frac{1}{(1+q)^2}.$$

4. Montrer que G admet une espérance et que celle-ci vaut 1. Interpréter ce résultat.

Partie C : étude d'une variable discrète sans mémoire

Soit Y une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $\mathbb{P}(Y \geqslant n) > 0$.
On suppose également que Y est sans mémoire c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{(Y \geqslant m)}(Y \geqslant n+m) = \mathbb{P}(Y \geqslant n).$$

On pose $\mathbb{P}(Y = 0) = p$ et $q = 1 - p$.

XII. Montrer que $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = q$. En déduire que $0 < q \leqslant 1$.

XIII. Montrer que pour tout couple (m, n) d'entiers naturels,

$$\mathbb{P}(Y \geqslant n+m) = \mathbb{P}(Y \geqslant m)\mathbb{P}(Y \geqslant n).$$

XIV. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{P}(Y \geqslant n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer $\mathbb{P}(Y \geqslant n)$ en fonction de n et de q.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y \geqslant n) - \mathbb{P}(Y \geqslant n+1)$.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = n) = q^n p$.

5. En déduire que q est différent de 1.

XV. Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire $Y + 1$.

XVI. Conclure que Y est sans mémoire si et seulement si $Y + 1$ est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$.

Partie D : taux de panne d'une variable discrète

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel n,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) > 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle taux de panne de Z à l'instant n, le réel noté λ_n défini par

$$\lambda_n = \mathbb{P}_{(Z \geqslant n)}(Z = n).$$

XVII. **1.** Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$1 - \lambda_n = \frac{\mathbb{P}(Z \geqslant n+1)}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)}.$$

2. Vérifier alors que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant \lambda_n < 1$.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k).$$

XVIII. **1.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(Z = k) = 1 - \mathbb{P}(Z \geqslant n).$$

2. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant n)$ existe et vaut 0.

3. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln(1-\lambda_n)$?

4. Que dire alors de la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \lambda_n$?

XIX. On suppose maintenant qu'il existe un nombre réel c tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = c$. Ce réel est appelé taux de panne de Z.

1. Montrer que $0 \leqslant c < 1$.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer $\mathbb{P}(Z \geqslant n)$ en fonction de c et de n.

3. Montrer que c est non nul.

4. En déduire une caractérisation des variables aléatoires ayant un taux de panne constant.