Problème Été Algèbre 1

On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

1° a) Justifier que B est diagonalisable par changement de b.o.

Cela résulte du théorème spectral pour les matrices symétriques réelles. En effet ${}^tB = B$ donc B est symétrique.

b) On calcule le polynôme caractéristique $\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3)$

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -1 \\ -3 & 3-\lambda & -3 \\ -1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -3 & -1 \\ -3-\lambda & 3-\lambda & -3 \\ -3-\lambda & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(3+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -3 \\ 1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(3+\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)$$

$\Lambda(B) = \{-3, 2, 6\}$

e_1

$\lambda_1 = -3$ $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & (-L_3) \\ 5x_2 - 5x_3 = 0 & (L_3 - L_2) \\ 5x_2 - 5x_3 = 0 & (L_1 + 4L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x_1 = x_2 = x_3}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e_2 On cherche $\lambda_2 = 2$ (x_1, x_2, x_3) / $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ (L_3) = (L_1). \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 10x_2 = 0 \end{cases}$ $(L_2 + 3L_1)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

e_3 2 méthodes

$\lambda_3 = 6$ ⓐ On résoud comme ci dessus le système $\begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ⓑ On se rappelle que 2 vecteurs propres d'une matrice symétrique associés à 2 valeurs propres $\neq$ sont orthogonaux (cf preuve du théorème spectral). Donc $\vec{e}_3$ est orthogonal à $\vec{e}_1$ et à $\vec{e}_2$ donc au plan $\Pi = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On peut l'obtenir grâce au produit vectoriel $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} -1 \\ +2 \\ -1 \end{vmatrix} = \varepsilon \vec{e}_3$

si $\varepsilon = 1$ la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ est directe

1(c) Calcul des quantités $\langle x,x\rangle$, $\langle g^n(x),x\rangle$ $n\in\mathbb{N}^*$

si $x=\sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}_i$, par définition d'une base o.n, $\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^{3} x_i^2$

chose que l'on retrouve aisément par $\langle x,x\rangle=\langle\sum_i x_i e_i, \sum_j x_j e_j\rangle$

$\langle x,x\rangle=\sum_i\sum_j x_i x_j \underbrace{\langle e_i,e_j\rangle}_{\delta_{ij}}=\sum_{i=1}^{3} x_i^2$ car seuls les termes pour lesquels $j=i$ restent.

Comme g est l'endomorphisme associé à B $g(x)=\sum x_i g(e_i)$ et

$g(x)=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i x_i e_i$; de même pour tout $n\geq 1$ $g^n(e_i)=\lambda_i^n e_i$

de sorte que $g^n(x)=\sum_{i=1}^{3} x_i\lambda_i^n e_i$. On a donc

$\langle g(x),x\rangle=\langle\sum\lambda_i x_i e_i, \sum_j x_j e_j\rangle=\sum_{i,j}\lambda_i x_i x_j \langle e_i,e_j\rangle=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i x_i^2$

et $\langle g^n(x),x\rangle=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^n x_i^2$ par un calcul analogue.

$\langle g^n(x),x\rangle=(-3)^n x_1^2+2^n x_2^2+6^n x_3^2$

1(d)i) $v_n(x)\neq 0$ pour n assez grand si $x_3\neq 0$

$v_n(x)=\langle g^n(x),x\rangle=6^n x_3^2\left(1+\frac{1}{3^n}\frac{x_2^2}{x_3^2}+\frac{(-1)^n x_1^2}{2^n x_3^2}\right)$

donc $v_n(x)\underset{n}{\sim}6^n x_3^2$ les deux autres termes tendant vers 0
(car suites géométriques de raison q $|q|<1$

Ainsi $v_n(x)>0$ si n est suffisamment grand car $x_3^2>0$.

De plus $\frac{v_n(x)}{v_{n-1}(x)}\underset{n}{\sim}6$ dans ce cas-là. Ainsi

la limite $\frac{v_n(x)}{v_{n-1}(x)}$ est 6 quand $x_3\neq 0$.

1°) d) $v_n(x)\neq 0$ pour n assez grand pour $x\neq 0$

on a déjà vu le cas où $x_3\neq 0$, Traitons le cas $x_3=0$.

on reprend $\langle g^n(x),x\rangle=(-3)^n x_1^2+2^n x_2^2$ si $x\in Vect(e_1,e_2)$

α) les cas particuliers où $x_1=0$, ou $x_2=0$, conduisent clairement à ce que $v_n(x)\neq 0$ (par ex si $x_1=0$ $v_n(x)=2^n x_2^2>0$ car alors $x=x_2\vec{e}_2\neq\vec{0}$)

β) Sinon $v_n(x)=x_1^2\left((-3)^n+2^n\frac{x_2^2}{x_1^2}\right)=(-3)^n x_1^2\underbrace{\left(1+(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{x_2^2}{x_1^2}\right)}_{T}$

La suite géométrique $(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ de raison $q=\frac{-2}{3}$ converge vers 0 car $|q|<1$

$\exists n_0, \forall n\geq n_0 \frac{1}{2}\geq(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n\geq-\frac{1}{2}$. Ainsi le terme T est strictement positif.

et $\exists n_0$ $\forall n\geq n_0$ $v_n(x)\neq 0$ puisque $|v_n(x)|=3^n x_1^2 T\neq 0$.

2(a) C est diagonalisable dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

Il suffit de calculer $C\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \vec{e_1}$.

.. $C\vec{e_2} = 3\vec{e_2}$ et $C\vec{e_3} = 3\vec{e_3}$. Rem : C étant symétrique, on savait que C était diagonalisable. Ici 3 est valeur propre double de C.

(b) Calcul des limites de quotients $W_n(\vec{e_i})$

On pose comme dans la question 1) $W_n(x) = \langle h^n(x), x \rangle$

$W_n(\vec{e_1}) = \langle h^n(\vec{e_1}), \vec{e_1} \rangle$ mais $h^n(\vec{e_1}) = (-3)^n \vec{e_1}$ donc $\boxed{W_n(\vec{e_1}) = (-3)^n}$

$W_n(\vec{e_2}) = \langle h^n(\vec{e_2}), \vec{e_2} \rangle$ avec $h^n(\vec{e_2}) = 3^n \vec{e_2}$ $\boxed{W_n(\vec{e_2}) = 3^n}$

de m. $\boxed{W_n(\vec{e_3}) = 3^n}$

on a ainsi $\frac{W_n(\vec{e_1})}{W_{n-1}(\vec{e_1})} = -3$ et la limite $\lim_{n \to \infty} \frac{W_n(\vec{e_1})}{W_{n-1}(\vec{e_1})} = -3$

De façon immédiate $\lim_n \frac{W_n(\vec{e_2})}{W_{n-1}(\vec{e_2})} = \lim_n \frac{W_n(\vec{e_3})}{W_{n-1}(\vec{e_3})} = 3$

(c) Déterminer $D = \{ x \in \mathbb{R}^3 \,/\, W_n(x) \neq 0$ à partir d'un certain rang$\}$

$W_n(x) = \langle h^n(x), x \rangle$ mais $h^n(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i h^n(e_i)$ par linéarité

$h^n(x) = (-3)^n x_1 \vec{e_1} + 3^n (x_2 \vec{e_2} + x_3 \vec{e_3})$

Et, comme on l'a vu en question 1°) c), $W_n(x) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^n x_i^2 \langle \vec{e_i}, \vec{e_i} \rangle$

i.e. $\boxed{W_n(x) = (-3)^n x_1^2 + 3^n (x_2^2 + x_3^2) = 3^n \left[x_2^2 + x_3^2 + (-1)^n x_1^2 \right]}$

donc $D = \{ x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 \neq 0$ et $x_2^2 + x_3^2 - x_1^2 \neq 0 \}$

(d) Trouver un x_0 / $\frac{W_n(x_0)}{W_{n-1}(x_0)}$ ne converge pas

Prenons $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $W_n(x_0) = 3^n (1 + 1 + (-1)^n)$ ainsi $\frac{W_n(x_0)}{W_{n-1}(x_0)} = \begin{cases} 9 & n \text{ pair} \\ 1 & n \text{ impair} \end{cases}$

et la suite ne peut converger, ayant deux valeurs d'adhérence $\neq$.

(e) $\lim_n \frac{W_n(x)}{W_{n-2}(x)}$?

comme n et $n-2$ ont même parité, vu l'expression trouvée en 2 c)

$\frac{W_n(x)}{W_{n-2}(x)} = \frac{3^n}{3^{n-2}} \frac{x_2^2 + x_3^2 + (-1)^n x_1^2}{x_2^2 + x_3^2 + (-1)^n x_1^2} = 9$ ce qui donne la limite cherchée.

Partie 2

A symétrique réelle

(*) $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \ldots \leq |\lambda_d|$ $\rho(A) = |\lambda_d|$

$B = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d)$ b.o.n de vecteurs propres

II 1 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} = \lambda_d$ si $|\lambda_{d-1}| < |\lambda_d|$

On remarque, comme dans la partie I, que

$$f^n(x) = \sum_{i=1}^d x_i f^n(e_i) \quad \text{et que} \quad f^n(e_i) = \lambda_i^n e_i \quad \text{de sorte que.}$$

$$u_n(x) = \left\langle \sum_{i=1}^d \lambda_i^n x_i e_i , \sum_{j=1}^d x_j e_j \right\rangle \underset{B \text{ est b.o.n}}{=} \sum_{i=1}^d \lambda_i^n x_i^2.$$

si $\langle x, e_d\rangle = x_d \neq 0$, $u_n(x) = \lambda_d^n x_d^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda_{d-1}}{\lambda_d}\right)^n x_{d-1}^2 + \cdots + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_d}\right)^n x_1^2\right]$

Comme (*) est vraie et que $|\lambda_{d-1}| < |\lambda_d|$, $|\lambda_i| < |\lambda_d|$ $\forall i \leq d-1$

et chacune des suites géométriques $\alpha_n = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_d}\right)^n$ converge vers zéro qd $n \to +\infty$

ainsi $u_n(x) \underset{n}{\sim} \underbrace{\lambda_d^n x_d^2}_{\neq 0 \text{ car } x_d \neq 0}$ et $\dfrac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \underset{n}{\sim} \lambda_d$.

($\lambda_d \neq 0$ sinon contradiction avec $|\lambda_{d-1}| < |\lambda_d|$; $|\lambda_d| \geq 0$)

2) Le cas "λ_d v.p. multiple".

Dans ce cas-là, $u_n(x) = \lambda_d^n x_d^2 + \lambda_d^n x_{d-1}^2 + \cdots + \lambda_d^n x_{k+1}^2 + \sum_{i=1}^k \lambda_i^n x_i^2$

$= \lambda_d^n [x_d^2 + \cdots + x_{k+1}^2] + \sum$ ——

$$u_n(x) = \lambda_d^n \Big[\underbrace{[x_d^2 + \cdots + x_{k+1}^2]}_{\neq 0 \ (x_d \neq 0)} + \underbrace{\sum_{i=1}^k \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_d}\right)^n x_i^2}_{\to 0 \text{ quand } n \to +\infty \text{ (comme ci-dessus)}} \Big]$$

Ainsi $u_n(x) \underset{n}{\sim} \lambda_d^n [x_d^2 + \cdots + x_{k+1}^2]$

et on retrouve que $\dfrac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \underset{n}{\sim} \lambda_d$ ce qui donne la limite désirée.

3) $\lambda_{d-1} = -\lambda_d \neq 0$

On construit, comme dans la question 1(d), le vecteur $x_0 = 2e_d + e_{d-1}$

$u_n(x_0) = \lambda_d^n (4 + (-1)^n)$ $\quad \dfrac{u_n(x_0)}{u_{n-1}(x_0)} = \lambda_d \dfrac{4+(-1)^n}{4-(-1)^n} = \lambda_d \times \begin{cases} 5/3 & n \text{ pair} \\ 3/5 & n \text{ impair} \end{cases}$

Partie III

$A \in S_d(\mathbb{R})$, $(e_1, \dots e_d)$ une b.o.n de diagonalisation, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_d$ les valeurs propres associées (comptées avec multiplicité)

$E_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ $F_k = \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_d)$

1) $\forall x \in F_k \setminus \{0\}$ $\dfrac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_k$

On calcule $\langle f(x), x\rangle$ grâce aux composantes $(x_1, \dots x_d)$ de $x \in \mathbb{R}^d$ dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_d)$

$$\langle f(x), x \rangle = \langle \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i e_i , \sum_{j=1}^d x_j e_j \rangle = \sum_i \sum_j \lambda_i x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle$$

$$\circledast \quad \boxed{\langle f(x), x \rangle = \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i^2} \quad \text{car } \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

Ainsi si $x \in F_k$ $x = \sum_k^d x_i e_k$ (les x_i, $i \leq k-1$, sont nuls) et $\circledast$ devient

$$\langle f(x), x \rangle = \sum_k^d \lambda_i x_i^2$$

Comme les λ_i sont ordonnés en croissant et que $\forall i$ $x_i^2 \geq 0$

$$\langle f(x), x \rangle \geq \left(\sum_k^d x_i^2\right) \lambda_k = \|x\|^2 \lambda_k$$

donc $\boxed{\dfrac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_k}$ dès que $x \neq 0$, $x \in F_k$.

2) $\displaystyle\min_{x \in F_k \setminus \{0\}} \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k$

- On a vu que λ_k est un minorant de l'ensemble $\left\{ \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}, x \in F_k \right.$
- Or $\lambda_k = \dfrac{\langle f(e_k), e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle}$ car $\langle f(e_k), e_k \rangle = \lambda_k \langle e_k, e_k \rangle = \lambda_k$

Donc $\boxed{\lambda_k = \displaystyle\min_{x \in F_k \setminus \{0\}} \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}}$

3) $\displaystyle\max_{x \in E_k \setminus \{0\}} \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k$

On reprend $\circledast$ et on raisonne de façon identique à la question III.1

$$\langle f(x), x \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 \quad (x_i = 0 \text{ si } i > k) \text{ pour tout } x \in E_k$$

A nouveau croissance de (λ_i) et positivité des x_i^2, conduisent à

$\forall x \in E_k \setminus \{0\}$ $\langle f(x), x\rangle \leq \lambda_k \sum_{i=1}^k x_i^2 = \lambda_k \|x\|^2$

Donc $\langle f(x), x \rangle \leq \lambda_k \langle x, x \rangle$ $\dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leq \lambda_k$

4) (a) Si $V \in \mathcal{V}_k$, $V \cap F_k \neq \{0\}$

C'est dû au fait que $\dim V + \dim F_k = d+1$.

comme $V + F_k \subset \mathbb{R}^d$ $\dim(V+F_k) \leq d$. Mais

$$\dim(F_k+V) = \underbrace{\dim V + \dim F_k}_{d+1} - \dim F_k \cap V \leq d$$

donc $\dim V \cap F_k \geq 1$.

Une façon autre fait appel au théorème de la base incomplète :

Soit $(f_1, .. f_k)$ une base de V, on peut la compléter par $e_{\ell_1}, \dots e_{\ell_{d-k}}$, $d-k$ vecteurs de la base $\underbrace{(e_k, \dots, e_d)}_{B_{F_k}}$ pour que $(f_1, \dots, f_k, e_{\ell_1}, \dots e_{\ell_{d-k}})$ forme une base de $\mathbb{R}^d$. Mais alors le dernier vecteur de B_{F_k}, $e_{\ell_{d-k+1}}$ se décompose dans la base

$$e_{\ell_{d-k+1}} = \sum_{i=1}^{k} y_i f_i + \sum_{j=1}^{d-k} y_j e_{\ell_j}$$

et $\sum_{i=1}^{k} y_i f_i \neq \vec{0}$ (sinon $(e_k, .., e_d)$ ne serait pas libre)

ainsi

$$\underbrace{e_{\ell_{d-k+1}} - \sum_{j=1}^{d-k} y_j e_{\ell_j}}_{\in F_k} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} y_i f_i}_{\in V \setminus \{0\}}$$

est un vecteur de $V \cap F_k \setminus \{0\}$.

(b) $\forall V \in \mathcal{V}_k$ $\max_{V \setminus \{0\}} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_k$

On sait que $\max_{V \setminus \{0\}} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \frac{\langle f(z), z \rangle}{\langle z, z \rangle}$ $\forall z \in V \setminus \{0\}$

Prenons $z \in V \cap F_k \setminus \{0\}$, qui existe d'après (a). La question III 1) établit que $\frac{\langle f(z), z \rangle}{\langle z, z \rangle} \geq \lambda_k$ ce qui donne le résultat souhaité.

(c) $\min_{V \in \mathcal{V}_k} \max_{V \setminus \{0\}} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \lambda_k$

La question (b) établit que λ_k est un minorant de $\mathcal{E} = \left\{ \max_{V \setminus \{0\}} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}, V \in \mathcal{V}_k \right\}$ et la question III 3 a montré que si $V = E_k$, la valeur λ_k est atteinte. Donc $\lambda_k = \mathrm{Min}(\mathcal{E})$.

(d) Montrer que $\displaystyle\max_{V\in\mathcal{V}_{d-k+1}} \min_{V\setminus\{0\}} \frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \lambda_k$

On raisonne comme ci-dessus mais en "échangeant" le rôle de F_k et de V.... Autrement dit, on considère $V\in\mathcal{V}_{d-k+1}$ et E_k.

(α) $\displaystyle\min_{x\in V\setminus\{0\}} \frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} \leq \frac{\langle f(z),z\rangle}{\langle z,z\rangle}$ pour $z\in V\cap E_k \neq \{0\}$

pour les mêmes raisons de dimension.

Comme $z\in E_k$ $\displaystyle\frac{\langle f(z),z\rangle}{\langle z,z\rangle}\leq\lambda_k$ ce qui donne $\displaystyle\min_{x\in V\setminus\{0\}}\frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}\leq\lambda_k$

(β) λ_k est atteint.

on prend $V=F_k\in\mathcal{V}_{d-k+1}$ et on sait que $\displaystyle\min_{x\in F_k\setminus\{0\}}\frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}=\lambda_k$

d'après III.2).

5 (a) A' est symétrique

$A' = Q^TAQ$ $\qquad (A')^T = (Q^TAQ)^T = Q^TA^TQ = Q^TAQ$

car A est symétrique.

(b) Calculs dans $\mathbb{R}^{d-1}$

(i) $\langle X,Y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$

(ii) $\langle q(x),q(y)\rangle = \langle$ [redacted] $Qx,$ [redacted] $Qy\rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle Q^TQx,y\rangle_{\mathbb{R}^{d-1}}$

$= \langle x,y\rangle_{\mathbb{R}^{d-1}}$ $(=\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}^d}$ si on plonge canoniquement$)$

(iii) $E'_k=\mathrm{Vect}(e'_1,..,e'_k)$ $\dim q(E'_k)$?

On sait que $\langle q(e'_i),q(e'_j)\rangle = \langle e'_i,e'_j\rangle = \delta_{ij}$

donc $\dim q(E'_k)\leq k$ (car E'_k / $\dim(E'_k)=k$)

et la famille $(q(e'_1),..\,q(e'_k))$ libre car orthogonale donc

$\dim q(E'_k)\geq k$

Ainsi $\boxed{\dim q(E'_k)=k}$

(c) $\lambda'_k = \max\limits_{z \in q(E'_k)\setminus\{0\}} \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle}$

$z \in q(E'_k)$, $\exists\, z' \in E'_k \,/\, z = Q(z')$

Mais alors $\langle f(z), z\rangle = \langle AQz', Qz'\rangle = \langle Q^T A Q z', z'\rangle$

Par ailleurs $\langle z, z\rangle = \langle z', z'\rangle$ d'après 5(b)ii).

Donc $\frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle} = \frac{\langle f'(z'), z'\rangle}{\langle z', z'\rangle}$ $z' \in E'_k \setminus\{0\}$

Mais $\max\limits_{z' \in E'_k \setminus\{0\}} \frac{\langle f'(z'), z'\rangle}{\langle z', z'\rangle} = \lambda'_k$ d'après III.3) appliqué à A'.

$$\| \qquad \max\limits_{z \in q(E'_k)\setminus\{0\}} \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle}$$

(d) $\lambda'_k \geq \lambda_k$

comme $q(E'_k)$ a pour dimension k, et que $\lambda_k = \min\limits_{V \in \mathcal{V}_k} \left[\max\limits_{x \in V\setminus\{0\}} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \right]$

on a $\lambda_k \leq \max\limits_{z \in q(E'_k)\setminus\{0\}} \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle} = \lambda'_k$ d'après (c).

(e) $\lambda'_k \leq \lambda_{k+1}$

Par un raisonnement analogue à la question (c), on obtient, via la question III

$$\lambda'_k = \min\limits_{z \in q(F'_k)\setminus\{0\}} \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle}$$

mais $F'_k = \mathrm{Vect}(e'_k, \dots, e'_{d-1})$ et donc $\dim F'_k = d-1-k+1 = d-k$

comme $\langle q(e_i), q(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, on a que

$\dim q(F'_k) = d-k$.

Il reste alors à écrire que :

$$\lambda'_k = \min\limits_{z \in q(F'_k)\setminus\{0\}} \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle} \leq \underbrace{\max\limits_{V \in \mathcal{V}_{d-k}} \left(\min\limits_{x \in V\setminus\{0\}} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \right)}_{\lambda_{k+1}}$$

d'après 4.d.