

Algèbre - Vrai-Faux des problèmes EP1 de 2022 à 2024

EP 1 2022 :

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.
 - (a) Soit n un entier strictement positif.
Affirmation : "Il existe des matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{Tr}(MN) \neq \text{Tr}(NM)$."
 - (b) Affirmation : "Deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ont le même polynôme caractéristique si et seulement si elles ont la même trace et le même déterminant."
 - (c) Affirmation : "Les matrices carrées et symétriques à coefficients dans $\mathbb{C}$ sont diagonalisables."
 - (d) Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux.
Affirmation : "Si $\varphi(a)$ est inversible dans B , alors a est inversible dans A ."

EP 1 2023 :

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.
 - (a) Affirmation : « Pour tout nombre premier p et pour tout entier naturel n non nul, l'anneau $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un corps. »
 - (b) Affirmation : « Si p est un nombre premier impair, alors la classe de 2 engendre le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, +, \cdot)$. »
 - (c) Affirmation : « Le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est cyclique. »
 - (d) Si a un entier relatif, alors on note $\bar{a}$ la classe de a dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
Étant donnés quatre entiers relatifs a, b, c et d , on note M la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ définie par $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on note $\bar{M}$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ définie par $\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$.
Affirmation : « Si $M \in GL_2(\mathbb{R})$, alors $\bar{M} \in GL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. »
 - (e) Soient K et L deux corps commutatifs.
Affirmation : « Un morphisme d'anneaux $\mu : K \rightarrow L$ est toujours injectif. »

EP 1 2024 :

Dans tout cet exercice, E désigne un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Les réponses devront être soigneusement justifiées.
 - (a) Tout endomorphisme de E est diagonalisable.
 - (b) Soient f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par f . Il existe un sous-espace vectoriel F' de E stable par f tel que $E = F \oplus F'$.
 - (c) Soit f un endomorphisme de E diagonalisable. Alors f^2 est diagonalisable.
 - (d) Soit f un endomorphisme de E tel que f^2 est diagonalisable. Alors f est diagonalisable.
 - (e) Soient f et g deux endomorphismes de E . Alors $\text{Tr}(f \circ g) = \text{Tr}(g \circ f)$.