Analyse - Vrai-Faux des problèmes EP2 de 2022 à 2023+2025

EP 2 2022 :

I. Séries entières.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.
   - **(a)** Affirmation : « soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suite de nombre réels positifs, telles que la série de terme général v_k converge et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant v_k$. Alors la série de terme général u_k converge également ».
   - **(b)** Affirmation : « soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suite de nombre réels, telles que la série de terme général v_k converge et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant v_k$. Alors la série de terme général u_k converge également ».
   - **(c)** Affirmation : « soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tous non nuls. On suppose que

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \ell,$$

     avec $\ell < 1$. Alors la série de terme général u_k converge absolument ».
   - **(d)** Affirmation : « soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues définies sur un même intervalle I, telle que pour tout $x \in I$, la suite $(u_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $U(x)$. La fonction U ainsi définie sur I est continue ».

EP 2 2023 :

Il s'agit de résultats classiques utiles par la suite. Bien entendu, ces résultats sont à établir, même s'ils apparaissent explicitement au programme du concours.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.
   - **(a)** Affirmation : « la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 4$, définie sur $\mathbb{R}$, est solution de l'équation différentielle $y' = y + 4$. »
   - **(b)** Affirmation : « l'unique solution du système de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + 4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

     est la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 4$, définie sur $\mathbb{R}$. »
   - **(c)** Affirmation : « l'équation différentielle $y' = y + 4$ possède une unique solution définie sur $\mathbb{R}$. »
   - **(d)** Affirmation : « l'ensemble des solutions de l'équation $y' = y + 4$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. »

EP 2 2025 :

Soit E un espace vectoriel normé. Dans la suite on considère E muni de la topologie induite par la norme. Pour toute partie A de E, on note $\mathring{A}$ l'intérieur de A, i.e. le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans A, $\overline{A}$ l'adhérence de A, i.e. le plus petit fermé contenant A. Le bord ∂A d'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est défini par $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$; c'est l'adhérence de A privée de l'intérieur de A. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. A est dense dans B si $\overline{A} = B$. Soit A une partie de E : A est une partie compacte (un compact) de E si de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A on peut extraire une suite convergeant dans A.

Soit E un espace vectoriel et soit A une partie de E. A est une partie convexe si, pour tout u et pour tout v éléments de A, le segment $[u, v] = \{x \in E,\ \exists t \in [0,1]$ tel que $x = (1-t)u + tv\}$ est inclus dans A.

Définition 1. *Une variable aléatoire X définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ suit une loi de Rademacher si* $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ *et si* $\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(X = -1) = \dfrac{1}{2}$.

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera soigneusement la réponse.

1. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est f.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est convergente et est nulle.
3. Il existe une probabilité P sur $\mathbb{N}^*$ telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(\{k\}) = \frac{1}{k(k+1)}.$$
4. Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ suivant toutes les deux des lois de Rademacher. Alors la variable aléatoire XY suit une loi de Rademacher.
5. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. On suppose que A est dense dans B et que B est dense dans E. Alors A est dense dans E.
6. La réunion de deux parties convexes de $\mathbb{R}^n$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.
7. La seule partie convexe dense de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$.