Proposition de corrigé : Banque PT – Épreuve C – 2021

Préambule

1. Une primitive de $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto x^2$ donc, d'après le théorème de structure des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1, f est une solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C\mathrm{e}^{-x^2}$. Finalement, l'unique solution de $(\mathcal{E})$ valant 1 en 0 est $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.
2. Par composition, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \\ f''(x) = \left(4x^2 - 2\right)\mathrm{e}^{-x^2} \\ f'''(x) = \left(-8x^3 + 12x\right)\mathrm{e}^{-x^2} \end{cases}$$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} f''(x) = 4\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-x^2} \\ f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \end{cases}$$
ce qui donne les signes de f'' et f' sur $\mathbb{R}$. Par composition, $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{\pm\infty} f' = 0$. On obtient ainsi les tableaux de variations de $f = |f|$, f' et $|f'|$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	
f'		$+$	0	$-$		
f'	0	↗ $\sqrt{2/\mathrm{e}}$	↘ 0	↘ $-\sqrt{2/\mathrm{e}}$		↗ 0
$\lvert f'\rvert$	0	↗ $\sqrt{2/\mathrm{e}}$	↘ 0	↗ $\sqrt{2/\mathrm{e}}$		↘ 0
$f = \lvert f\rvert$	0		↗ 1		↘ $1/\mathrm{e}$	↘ 0

D'après le tableau de variations, $|f|$ admet un maximum sur $[0,1]$, et $|f'|$ admet un maximum sur $[0,1]$ et sur $\mathbb{R}$, et on a :
$$\max_{[0,1]}|f| = 1 \quad \text{et} \quad \max_{[0,1]}|f'| = \max_{\mathbb{R}}|f'| = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}.$$
4. (a) Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
   (b) Soit ε un réel strictement positif. Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec le théorème des accroissements finis, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, il existe c compris entre x et y tel que :
$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x-y| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}|x-y|$$
où l'inégalité découle de la question 3. Ainsi, en posant $\eta = \sqrt{\dfrac{\mathrm{e}}{2}}\varepsilon$, on obtient bien :
$$\forall (x,y) \in [0,1]^2 : \quad |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

5. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: « il existe $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$, $\deg(H_n) = n$ et $x \mapsto H_n(x)$ a la même parité que n ».
Initialisation :
On a $f^{(0)} = f$ donc, en posant $H_0 = 1$, on a $f : x \mapsto H_0(x)\mathrm{e}^{-x^2}$, $\deg(H_0) = 0$ et $x \mapsto H_0(x)$ est paire (c'est la fonction constante en 1). Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(n)$. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\right) = \left(H_n'(x) - 2xH_n(x)\right)\mathrm{e}^{-x^2} = H_{n+1}(x)\mathrm{e}^{-x^2}$$
où on a posé $H_{n+1} = H_n' - 2XH_n$. En tant que produit et somme de polynômes et dérivée de polynôme (par hypothèse de récurrence), H_{n+1} est un polynôme à coefficients réels. De plus, $\deg(H_n') < \deg(H_n)$ ce qui donne $\deg(H_{n+1}) = \deg(-2XH_n) = \deg(-2X) + \deg(H_n) = 1 + n$. Déterminons la parité de $g : x \mapsto H_{n+1}(x)$. On traite le cas où n est pair (le cas n impair est analogue). Par hypothèse de récurrence, $x \mapsto H_n(x)$ est paire donc $x \mapsto H_n'(x)$ est impaire ce qui donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g(-x) = H_{n+1}(-x) = H_n'(-x) + 2xH_n(-x) = -H_n'(-x) + 2xH_n(x) = -H_{n+1}(x) = -g(x)$$
donc g est impaire qui est bien la même parité que $n+1$. La propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Ceci achève la récurrence.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Compte-tenu de la relation entre H_{n+1} et H_n et puisque $\deg(H_n') < \deg(H_n)$, on a
$$a(H_{n+1}) = -2a(H_n).$$
Par suite, $\left(a(H_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme 1 (car $H_0 = 1$). Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a(H_n) = (-2)^n$.

Partie I

1. Soit g une fonction paire définie et continue sur $\mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Or, la fonction $t \mapsto -t$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_-$ strictement décroissante donc, par changement de variable, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{-\infty} -g(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. En conclusion, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\varphi : x \mapsto x^n\mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable. De plus, pour tout $x \in [1, +\infty[$:
$$|\varphi(x)| \leqslant x^n\mathrm{e}^{-x} = x^n\mathrm{e}^{-x/2}\mathrm{e}^{-x/2} \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{-x/2})$$
où la relation de comparaison est donnée par une croissance comparée. Or, $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2}$ est continue, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$ donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty}|\varphi|$ est convergente et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi$ est (absolument) convergente. Par Chasles, l'intégrale I_n existe. Le raisonnement est analogue pour J_n en comparant avec $t \mapsto \mathrm{e}^{t/2}$ au voisinage de $-\infty$.
3. Avec le même changement de variable que dans la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} x^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{+\infty}^{0} (-x)^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left(1 + (-1)^n\right)\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left(1 + (-1)^n\right)I_n. \end{aligned}$$
ce qui donne, lorsque n est impair, $J_n = 0$.
4. Une primitive de $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$. Cette dernière fonction tend vers 0 en $+\infty$ donc
$$I_1 = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-0^2} - \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{2}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $u : x \mapsto x^{n+1}$ et $v : x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissance comparée, uv tend vers 0 en $+\infty$ donc, par intégration par partie pour les intégrales généralisées, $\int_0^{+\infty} uv' = -I_{n+2}$ et $\int_0^{+\infty} u'v$ sont de même nature, c'est-à-dire convergentes puisque I_{n+2} converge et on a l'égalité :

$$-I_{n+2} = \int_0^{+\infty} x^{n+1}\big(-x\mathrm{e}^{-x^2}\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} uv' = \lim_{+\infty} uv - u(0)v(0) - \int_0^{+\infty} u'v = 0 - 0 - \int_0^{+\infty} (n+1)x^n \frac{e^{-x^2}}{2}\,\mathrm{d}x$$

donc $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

6. Soit k un entier naturel. Avec la relation de la question précédente, (I_n) est une suite strictement positive et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2(n+1)} = (2n+1)I_{2n}/2$. On a, par produits télescopiques :

$$\frac{I_{2k}}{I_0} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{I_{2(i+1)}}{I_{2i}} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{2i+1}{2} = \frac{1}{2^k}\prod_{i=1}^{k-1}(2i+1) = \frac{1}{2^k}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{(2i+1)\times 2i}{2i} = \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{k-1}}\frac{(2k-1)!}{(k-1)!} = \frac{(2k)!}{2^k \times 2^k k!}$$

donc

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!} I_0 = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

La relation de la question précédente donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n+1} = nI_{2n-1}$ donc, par récurrence immédiate :

$$I_{2k+1} = k! I_1 = \frac{k!}{2}.$$

7. (a) Soit P une fonction polynomiale. Cette fonction est une combinaison linéaire finie de la famille $(x \mapsto x^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ainsi, comme J_k est convergente pour tout entier naturel k, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge comme combinaison linéaire finie d'intégrales convergentes.

   (b) La fonction $x \mapsto Q(x)^2\mathrm{e}^{-x^2}$ est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$ donc cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}$. Comme $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction Q^2 donc la fonction Q est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

   (c) Soit P et Q deux fonctions polynomiales. L'application $P \times Q$ est polynomiale donc, d'après la question précédente, $\langle P, Q\rangle$ est bien défini. L'application considérée est
   – symétrique car $\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$ puisque $P \times Q = Q \times P$;
   – linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale ;
   – positive car, comme la fonction $t \mapsto P(t)^2\mathrm{e}^{-t^2}$ est positive sur $\mathbb{R}$, $\langle P, P\rangle \geqslant 0$;
   – définie-positive car, par la question précédente, si $\langle P, P\rangle = 0$ alors P est identiquement nulle.

   (d) On a :

$$\langle H_0, H_1\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \times (-2x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -2J_1 = 0.$$

   (e) En utilisant H_1H_2 impair ou l'énoncé on a également $\langle H_1, H_2\rangle = 0$. De plus $H_0 = 1$ et $H_2 f = f''$ donc $\langle H_0, H_2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f''(x)\,\mathrm{d}x = 0$. On a donc H_0, H_1, H_2 famille orthogonale de l'espace qu'ils engendrent : ils forment donc une base orthogonale de celui-ci. Il reste à les normer. On a :

$$\|H_0\|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2I_0}{\sqrt{\pi}} = 1,$$

$$\|H_1\|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} 4x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{8I_2}{\sqrt{\pi}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 2$$

et

$$\begin{aligned}\|H_2\|^2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (4x^2-2)^2\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{16}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{8}{\sqrt{\pi}}(4I_4 - 4I_2 + I_0) = \frac{8}{\sqrt{\pi}}(3 - 2 + 1)\,I_0 = 8.\end{aligned}$$

   Ainsi, $(H_0, H_1/\sqrt{2}, H_2/2\sqrt{2})$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(H_0, H_1, H_2)$.
   Remarque : Comme les degrés de H_0, H_1 et H_2 sont étagés, ces trois vecteurs sont linéairement indépendants donc l'espace $\mathrm{Vect}(H_0, H_1, H_2)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension 2, c'est-à-dire qu'on a l'égalité $\mathrm{Vect}(H_0, H_1, H_2) = \mathbb{R}_2[X]$.

Partie II

1. $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto e^{-x^2t^2}$ est continue sur $[1;2]$, donc la fonction F est bien définie.
   De plus $\forall x \in \mathbb{R}, F(-x) = -x\int_1^2 e^{-(-x)^2t^2}dt = -x\int_1^2 e^{-x^2t^2}dt = -F(x)$.
   La fonction F est donc impaire.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \neq 0$, on effectue le changement de variable $u = xt$, donc $du = xdt$ (changement de variable dans l'intégrale d'une fonction continue sur un segment), ce qui donne $F(x) = \int_1^2 e^{-(xt)^2}xdt = \int_x^{2x} e^{-u^2}du$. Le résultat reste vrai si $x = 0$.

3. On pose, $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \int_0^x e^{-u^2}du$.
   La fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = e^{-x^2}$.
   Or d'après la relation de Chasles : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^{2x} e^{-u^2}du - \int_0^x e^{-u^2}du = H(2x) - H(x)$.
   Par composition et différence, on peut donc affirmer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}.$$

4. On reprend les notations de la question précédente : si $x \in \mathbb{R}, F(x) = H(2x) - H(x)$.
   Or $H(x) = \int_0^x e^{-u^2}du$ tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   Par composition de limite, $H(2x)$ tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   Finalement, $F(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On s'intéresse à la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} F(2^k)$ (définie pour tout entier naturel n)
   On a alors, en utilisant l'expression de F obtenue à la question 2. :
   $S_n = \sum_{k=0}^{n}\int_{2^k}^{2^{k+1}} e^{-u^2}du = \int_1^{2^{n+1}} e^{-u^2}du$ grâce à la relation de Chasles.
   Or $\int_1^{2^{n+1}} e^{-u^2}du = \int_0^{2^{n+1}} e^{-u^2}du - \int_0^1 e^{-u^2}du$ tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^1 e^{-u^2}du$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   La somme partielle S_n admet donc une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui signifie que la série de terme général $F(2^n)$ converge.

6. (a) Nous avons déjà montré à la question 3. que $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.

   (b) On a les équivalences suivantes, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}F'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2e^{-4x^2} = e^{-x^2} \\ &\Leftrightarrow \ln(2) + (-4x^2) = -x^2 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 = \ln(2) \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{\ln(2)}{3} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\end{aligned}$$

(c) On a les équivalences suivantes, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) > 0 &\Leftrightarrow 2e^{-4x^2} > e^{-x^2} \\ &\Leftrightarrow \ln(2) + (-4x^2) > -x^2 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 < \ln(2) \\ &\Leftrightarrow x^2 < \frac{\ln(2)}{3} \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} < x < \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variations suivant : (on a noté $\alpha = F\left(\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\right)$, et on rappelle que F est impaire)

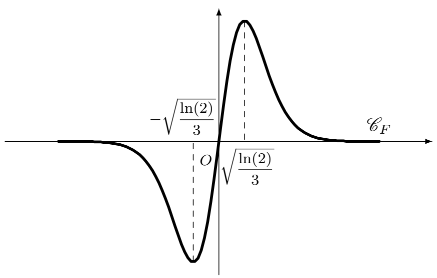
x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$		$\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\searrow$	$-\alpha$	$\nearrow$	α	$\searrow$	0

7. Soit un réel x strictement positif fixé. On a les implications suivantes (on utilise entre autres la croissance de la fonction exponentielle et la propriété dite de croissance de l'intégrale) :

$$1 \leq t \leq 2 \Rightarrow -4 \leq -t^2 \leq -1 \Rightarrow -4x^2 \leq -x^2t^2 \leq -x^2 \Rightarrow e^{-4x^2} \leq e^{-x^2t^2} \leq e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 e^{-4x^2}dt \leq \int_1^2 e^{-x^2t^2}dt \leq \int_1^2 e^{-x^2}dt \Rightarrow e^{-4x^2} \leq \int_1^2 e^{-x^2t^2}dt \leq e^{-x^2} \Rightarrow xe^{-4x^2} \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$$

8. On donne une allure de la courbe représentative de F sans échelle précise :



9. (a) Nous avons vu que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc en particulier elle est continue sur $\mathbb{R}$ et elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction F est positive sur $\mathbb{R}^+$ (car $\int_1^2 e^{-x^2t^2}dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale).
La fonction G (qui est telle que $G' = F$ par définition), est donc **croissante** sur $\mathbb{R}^+$.
On peut donc affirmer que G admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$.

(c) On note donc ℓ_G la limite de G en $+\infty$. Il s'agit dans cette question de montrer que ℓ_G est un réel et d'encadrer ce réel.
Remarquons que par définition, G est l'unique primitive de F qui s'annule en 0, ce qui se traduit par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \int_0^x F(t)dt$$

Or d'après la question 7., $\forall t > 0, te^{-4t^2} \leq F(t) \leq te^{-t^2}$
Par croissance de l'intégrale, on a alors : $\forall x > 0, \int_0^x te^{-4t^2}dt \leq G(x) \leq \int_0^x te^{-t^2}dt$
donc : $\left[-\frac{1}{8}e^{-4t^2}\right]_0^x \leq G(x) \leq \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^x$, et enfin : $\frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-4x^2} \leq G(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} \leq \frac{1}{2}$
Dans un premier temps on peut affirmer que $\ell_G \in \mathbb{R}$ car G est majorée par $\frac{1}{2}$ sur $]0;+\infty[$
D'autre part, par passage à la limite dans l'encadrement obtenu, on a donc $\frac{1}{8} \leq \ell_G \leq \frac{1}{2}$.

10. (a) Pour tout réel x on a : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

(b) Pour cette question on va utiliser l'expression : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = G(2x) - G(x)$ avec $G(x) = \int_0^x e^{-u^2}du$.
Or $\forall u \in \mathbb{R}, e^{-u^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{n!}$
Par intégration terme à terme d'une série entière, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$.
Le rayon de convergence étant infini on a ainsi le développement en série entière de F dont le rayon de convergence est $+\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

$$\text{donc : } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2^{2n+1}-1)}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Partie III

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit x un réel.
Nous devons calculer $\sum_{k=0}^{n} kR_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} && \textit{car le terme est nul si } k=0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}x^{p+1}(1-x)^{n-1-p} && \textit{on a posé } p=k-1 \\ &= nx\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}x^{p}(1-x)^{n-1-p} \\ &= nx(x+(1-x))^{n-1} \\ &= nx \end{aligned}$$

où la dernière ligne vient de la formule du binôme de Newton.
Finalement on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} kR_{n,k}(x) = nx.$$

2. Soit $p \in]0,1[$. Puisque les variables $(X_1, \ldots, X_n)$ sont indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p, la variable $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres (n,p), et $\mathbb{E}(S_n) = np$.

3. (a) D'après la formule du transfert, on peut écrire :

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

On a donc bien : $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = B_n(f)(p)$

(b) Loi faible des grands nombres : Soit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et de même loi. On note $p = \mathbb{E}(X_1)$ l'espérance commune à toutes ces variables aléatoires, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On a alors :

$$\forall \eta > 0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \eta\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dans ce problème, nous sommes exactement dans le contexte d'application de ce théorème (la loi commune aux variables aléatoires X_n étant la loi de Bernoulli de paramètre p).

Fixons $\epsilon > 0$. Pour tout $\eta > 0$, par définition de la limite, à partir d'un certain rang tous les termes de la suite seront inférieurs ou égaux à ϵ. Autrement dit :

$$\forall \eta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \eta\right) \leq \epsilon$$

(c) Soit $\eta > 0$. Pour tout entier naturel k on a $\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \eta$ ou bien $\left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta$.

Autrement dit $\left\{k \in \mathbb{N}, \left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \eta\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{N}, \left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta\right\} = \mathbb{N}$

(d) Soit $\epsilon > 0$. Pour tout entier naturel n, on a alors :

$$\begin{aligned}
|f(p) - B_n(f)(p)| &= \left|f(p) - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| && \textit{d'après la question 3.a.}\\
&= \left|f(p) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(S_n = k)\right|\\
&= \left|f(p)\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n = k) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(S_n = k)\right| && \textit{car } \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n = k) = 1\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathbb{P}(S_n = k)\right|\\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathbb{P}(S_n = k) && \textit{d'après l'inégalité triangulaire}
\end{aligned}$$

D'après la question 4.b. du préambule, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [0; 1]^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$

On considère donc un tel η et on va couper la somme précédente en deux parties, suivant si $\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \eta$ ou bien $\left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta$. On a donc :

$$|f(p) - B_n(f)(p)| \leq \sum_{\substack{k=0\\ \left|\frac{k}{n}-p\right|\leq\eta}}^{n}\left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathbb{P}(S_n = k) + \sum_{\substack{k=0\\ \left|\frac{k}{n}-p\right|>\eta}}^{n}\left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathbb{P}(S_n = k)$$

Majorons chacun des deux termes à part :

– Pour le premier terme :
$$\sum_{\substack{k=0\\ \left|\frac{k}{n}-p\right|\leq\eta}}^{n}\left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathbb{P}(S_n = k) \leq \sum_{\substack{k=0\\ \left|\frac{k}{n}-p\right|\leq\eta}}^{n}\epsilon\mathbb{P}(S_n = k) \leq \epsilon\sum_{\substack{k=0\\ \left|\frac{k}{n}-p\right|\leq\eta}}^{n}\mathbb{P}(S_n = k) \leq \epsilon\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n = k) = \epsilon$$
On peut également remarquer que par le théorème de transfert

$$\sum_{\substack{k=0\\ \left|\frac{k}{n}-p\right|\leq\eta}}^{n}\left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{E}\left(\left|f(p) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\mathbf{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\leq\eta}\right).$$

– Pour le deuxième terme, on utilise tout d'abord l'inégalité triangulaire et le fait que la fonction f soit majorée sur $[0, 1]$ pour affirmer :
$\left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq |f(p)| + \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq 2\max_{[0,1]}|f(t)|.$
On a donc :
$$\sum_{\substack{k=0\\ \left|\frac{k}{n}-p\right|>\eta}}^{n}\left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathbb{P}(S_n = k) \leq 2\max_{[0,1]}|f(t)|\sum_{\substack{k=0\\ \left|\frac{k}{n}-p\right|>\eta}}^{n}\mathbb{P}(S_n = k) = 2\max_{[0,1]}|f(t)|\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \eta\right) \leq 2\max_{[0,1]}|f(t)|\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \eta\right)$$
Or d'après la question 3.b., $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \eta\right) \leq \epsilon$

Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,$ $\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ \left|\frac{k}{n}-p\right|>\eta}}^{n}\left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathbb{P}(S_n = k) \leq 2\max_{[0,1]}|f(t)|\epsilon$

De même que précédemment, on peut également remarquer que par le théorème de transfert

$$\sum_{\substack{k=0\\ \left|\frac{k}{n}-p\right|>\eta}}^{n}\left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{E}\left(\left|f(p) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\mathbf{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\eta}\right) \leq 2\max_{[0,1]}|f(t)|\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\eta}\right),$$

avec

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\eta}\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \eta\right).$$

Finalement, en rassemblant les majorations des deux termes, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f(p) - B_n(f)(p)| \leq (1 + 2\max_{[0,1]}|f(t)|)\epsilon$$

Cette affirmation étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit, par définition de la limite, que

$$B_n(f)(p) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(p).$$

En allant un peu plus loin on peut montrer la convergence uniforme : par l'inégalité de Bienaymé-Chebychev on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \eta\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n/n)}{\eta^2},$$

avec

$$\mathrm{Var}(S_n/n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k) = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n},$$

où on a utilisé le fait que $p = \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)$ et que les variables étaient deux à deux décorrélées (car indépendantes) pour calculer la variance. On voit ainsi que pour $\epsilon > 0$ fixé

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \in [0, 1], \forall n \geq n_0, |f(p) - B_n(f)(p)| \leq (1 + 2\max_{[0,1]}|f(t)|)\epsilon.$$